

АВТОНОМНАЯ НЕКОММЕРЧЕСКАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ СОЦИАЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ»

Утверждаю
Декан факультета
_____ Ж.В. Игнатенко
«19» мая 2025 г.

Методические указания
к семинарам и по выполнению самостоятельной работы
ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Специальность: 09.02.09 Веб-разработка

Квалификация: разработчик веб-приложений

Направленность: Разработка веб-приложения на стороне клиента

Форма обучения очная

Рекомендована
на заседании кафедры ПИМ
от «19» мая 2025 г.
протокол № 10
Зав. кафедрой _____
Д.Г.Ловянников

Согласована
зав. кафедрой ПИМ
_____ Д.Г.Ловянников

Одобрена
на заседании учебно-методической
комиссии ФИСТ от «19» мая 2025 г.
протокол № 9
Председатель УМК _____ Ж.В.
Игнатенко

Ставрополь, 2025г.

Содержание

Пояснительная записка.....	3
1. Методические указания для студентов по работе с лекционным материалом.....	3
2. Методические указания для студентов по работе на практических занятиях.....	5
3. Методические указания по изучению источников информации по дисциплине.....	5
4. Выполнение творческих заданий	6
5. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины.....	17
6. Практические занятия по дисциплине.....	19

Пояснительная записка

Самостоятельная работа является обязательной формой работы по дисциплине «Элементы высшей математики». Умение самостоятельно получать новые знания и повышать свою квалификацию является неотъемлемой составляющей образования в современном вузе. Основной целью самостоятельной работы является расширенное и углубленное изучение вопросов, рассматриваемых на лекциях, а также выходящих за рамки контактного обучения, но входящего в общий объем знаний дисциплины.

Самостоятельное выполнение заданий, реферирование материалов способствует развитию у студентов навыков работы с учебной литературой, научными публикациями, использования электронных ресурсов, а также формированию способностей к обобщению и структуризации полученных знаний.

Самостоятельная работа по дисциплине «Элементы высшей математики» включает:

- подготовку к лекциям и практическим занятиям;
- изучение источников информации по дисциплине: учебной литературы, конспектов лекций, электронных ресурсов;
- выполнение творческих заданий;
- выполнение заданий указанных в методических рекомендациях;
- подготовка к текущему и итоговому контролю.

1. Методические указания для студентов по работе с лекционным материалом.

Изучение дисциплины следует начинать с проработки рабочей программы, особое внимание, уделяя целям и задачам, структуре и содержанию курса.

При подготовке к занятиям студент должен просмотреть конспекты лекций, рекомендованную литературу по данной теме; подготовиться к ответу на контрольные вопросы.

Успешное изучение курса требует от студентов посещения лекций, активной работы на практических занятиях, выполнения всех учебных заданий преподавателя, ознакомления основной и дополнительной литературой.

Запись лекции – одна из форм активной самостоятельной работы студентов, требующая навыков и умения кратко, схематично, последовательно и логично фиксировать основные положения, выводы, обобщения, формулировки. Культура записи лекции – один из важнейших факторов успешного и творческого овладения знаниями. Последующая работа над текстом лекции воскрешает в памяти ее содержание, позволяет развивать аналитическое мышление. В конце лекции преподаватель оставляет время (5-10 минут) для того, чтобы студенты имели возможность задать уточняющие вопросы по изучаемому материалу.

Лекции имеют в основном обзорный характер и нацелены на освещение наиболее трудных и дискуссионных вопросов, а также призваны способствовать формированию навыков работы с научной литературой. Предполагается также, что студенты приходят на лекции, предварительно проработав соответствующий учебный материал по источникам, рекомендуемым программой.

Работа с конспектом лекций предполагает просмотр конспекта в тот же день после занятий, пометку материала конспекта, который вызывает затруднения для понимания. Попытайтесь найти ответы на затруднительные вопросы, используя рекомендуемую

литературу. Если самостоятельно не удалось разобраться в материале, сформулируйте вопросы и обратитесь за помощью к преподавателю на консультации или ближайшей лекции. Регулярно отводите время для повторения пройденного материала, проверяя свои знания, умения и навыки по контрольным вопросам.

Как слушать лекцию.

1. Выделяйте основные положения. Нельзя понять и запомнить все, что говорит лектор, однако можно выделить основные моменты. Для этого необходимо обращать внимание на вводные слова, словосочетания, фразы, которые используются, как правило, для перехода к новым положениям, выводам и обобщениям.

2. Старайтесь поэтапно (в момент завершения вопроса, подвопроса, тезиса и т.п.) анализировать и обобщать материал. Это готовит базу для его экономной, свернутой записи.

3. Старайтесь опережать речь лектора, предугадать дальнейшее содержание. С каждым случаем удачи улучшается понимание и запоминание отдельных положений лекции. Даже при неудачах качество восприятия лекции повышается, т.к. вы имеете возможность сравнить ваши предложения и утверждения лектора.

4. Будьте постоянно готовы слушать лекцию до конца, не поддавайтесь соблазну «отдохнуть» на длинной лекции.

Как правильно записывать лекцию.

1. Подготовьте специальную тетрадь для записи лекций: оставьте поля (для вопросов, мелких пометок и рисунков, собственных замечаний и т.д.), оставляйте при записи между строчками интервал (для дополнений, подчеркиваний и т.п.).

2. Не пишите лекцию дословно, подробно записывайте основную информацию, а дополнительные и вспомогательные сведения - очень кратко.

3. Применяйте систему условных сокращений:

а) сокращение общепринятых вспомогательных слов: так как, например (т.к., напр.), так далее (т.д.), таким образом, главным образом (т.о., гл.обр.), смотри (см), может быть (м.б.), так называемый (т.н.), какой-либо (к-л.), который (кт. или ктр.), несколько (неск.), чтобы (чбы.) и т.д.

б) аббревиатуры для ключевых слов курса,

в) сокращение известных слов до начальной части, например, коэффициент (коэфф.), однократный (однокр.); в некоторых случаях целесообразно использовать латинский алфавит: максимум (max), минимум (min), температура (t) и т.п.

г) используйте для сокращений математическую, символику: больше ($>$), меньше ($<$), сумма (Σ), приближенно ($\approx$), следовательно ($\Rightarrow$) и другие.

4. При записи и работе над конспектом лекции используйте условные знаки:

I - прочитать ещё раз, Y – важно, Z - законспектировать ! – смело, ? – непонятно, S -слишком сложно, A – согласен, N - ново и др.

2. Методические указания для студентов по работе на практических занятиях.

Практические занятия посвящаются, главным образом, решению упражнений по дисциплине. Специфика предмета такова, что студент должен уже уметь решать задачи по теории вероятностей, математической статистике, и владеть основными методами и приемами решения текстовых задач. Если у студента присутствуют пробелы в этой области, то перед изучением темы и при подготовке к практическим занятиям, студенту необходимо повторить (изучить) соответствующий раздел математики, чтобы на практических занятиях усвоить основные вопросы.

3. Методические указания по изучению источников информации по дисциплине

Самостоятельная работа с учебниками, книгами, конспектами, электронными ресурсами – это важнейшее условие формирования у себя научного способа познания. Основные советы здесь можно свести к следующим:

1. Составить перечень книг, с которыми Вам следует познакомиться.
2. Сам такой перечень должен быть систематизированным (что необходимо для семинаров, что для экзаменов, что пригодится для написания курсовых и дипломных работ, а что Вас интересует за рамками официальной учебной деятельности, то есть что может расширить Вашу общую культуру...).
3. Обязательно выписывать все выходные данные по каждой книге (при написании курсовых и дипломных работ это позволит очень сэкономить время).
4. При составлении перечней литературы следует посоветоваться с преподавателями (или даже с более подготовленными и эрудированными сокурсниками), которые помогут Вам лучше сориентироваться, на что стоит обратить большее внимание, а на что вообще не стоит тратить время...
5. Естественно, все прочитанные книги, учебники и статьи следует конспектировать, но это не означает, что надо конспектировать «все подряд»: можно выписывать кратко основные идеи автора и иногда приводить наиболее яркие и показательные цитаты (с указанием страниц).
6. Если книга – Ваша собственная, то допускается делать на полях книги краткие пометки или же в конце книги, на пустых страницах просто сделать свой «предметный указатель», где отмечаются наиболее интересные для Вас мысли и обязательно указываются страницы в тексте автора (это очень хороший совет, позволяющий экономить время и быстро находить «избранные» места в самых разных книгах).
7. Если Вы раньше мало работали с научной литературой, то следует выработать в себе способность «воспринимать» сложные тексты; для этого лучший прием – научиться «читать медленно», когда Вам понятно каждое прочитанное слово (а если слово незнакомое, то либо с помощью словаря, либо с помощью преподавателя обязательно его узнать); опыт показывает, что после этого студент быстро и качественно прорабатывает книги.
8. Есть еще один эффективный способ оптимизировать знакомство с научной литературой – следует увлечься какой-то идеей и все книги просматривать с точки зрения данной идеи. В этом случае студент будет как бы искать аргументы «за» или «против» интересующей его идеи, и одновременно он будет как бы общаться с авторами этих книг по поводу своих идей и размышлений... Чтение научного текста является частью познавательной деятельности. Ее цель – извлечение из текста необходимой информации. От того на сколько осознанна читающим собственная внутренняя установка при обращении к печатному слову (найти нужные сведения, усвоить информацию полностью

или частично, критически проанализировать материал и т.п.) во многом зависит эффективность осуществляемого действия. Для студентов основным видом чтения учебной литературы является изучающее чтение, которое предполагает доскональное освоение материала; в ходе такого чтения готовность принять изложенную информацию, реализуется установка на предельно полное понимание материала; именно оно позволяет в работе с учебной литературой накапливать знания в различных областях. Вот почему именно этот вид чтения в рамках учебной деятельности должен быть освоен в первую очередь. Кроме того, при овладении данным видом чтения формируются основные приемы, повышающие эффективность работы с научным текстом.

Основные виды систематизированной записи прочитанного:

1. Аннотирование – предельно краткое связное описание просмотренной или прочитанной книги (статьи), ее содержания, источников, характера и назначения;
2. Планирование – краткая логическая организация текста, раскрывающая содержание и структуру изучаемого материала;
3. Тезирование – лаконичное воспроизведение основных утверждений автора без привлечения фактического материала;
4. Цитирование – дословное выписывание из текста выдержек, извлечений, наиболее существенно отражающих ту или иную мысль автора;
5. Конспектирование – краткое и последовательное изложение содержания прочитанного. Конспект – сложный способ изложения содержания книги или статьи в логической последовательности. Конспект аккумулирует в себе предыдущие виды записи, позволяет всесторонне охватить содержание книги, статьи. Поэтому умение составлять план, тезисы, делать выписки и другие записи определяет и технологию составления конспекта.

Методические указания по составлению конспекта:

1. Внимательно прочитайте текст. Уточните в справочной литературе непонятные слова. При записи не забудьте вынести справочные данные на поля конспекта;
2. Выделите главное, составьте план;
3. Кратко сформулируйте основные положения текста, отметьте аргументацию автора;
4. Законспектируйте материал, четко следуя пунктам плана. При конспектировании старайтесь выразить мысль своими словами. Записи следует вести четко, ясно. 8
5. Грамотно записывайте цитаты. Цитируя, учитывайте лаконичность, значимость мысли. В тексте конспекта желательно приводить не только тезисные положения, но и их доказательства. При оформлении конспекта необходимо стремиться к емкости каждого предложения. Мысли автора книги следует излагать кратко, заботясь о стиле и выразительности написанного. Число дополнительных элементов конспекта должно быть логически обоснованным, записи должны распределяться в определенной последовательности, отвечающей логической структуре произведения. Для уточнения и дополнения необходимо оставлять поля. Овладение навыками конспектирования требует от студента целеустремленности, повседневной самостоятельной работы.

4. Выполнение творческих заданий

Творческие задания – одна из форм самостоятельной деятельности студентов. Они способствуют углублению знаний по математике, ускорению темпов овладения информационными технологиями, выработке устойчивых навыков самостоятельной работы, экономии времени, снижению нагрузки.

В качестве главных признаков творческих работ обучающихся можно выделить:

- высшая степень самостоятельности;
- умение логически обрабатывать материал;
- умение самостоятельно сравнивать, сопоставлять и обобщать его;

- умение классифицировать по тем или иным признакам;
- умение высказывать своё отношение к описываемым явлениям и событиям;
- давать собственную оценку какой-либо работы

Задания

Ниже представлены типовые задачи, которые охватывают необходимые знания рассматриваемой дисциплины.

Типовой расчёт по линейной алгебре

Вариант 1.

Задача 1. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 10 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,

1) Вычислить матрицу $-A - 2C - 3C^T$; 2) Выполняется ли равенство $AC=CA$?

3) Вычислить определители $|A|, |C|, |AC|$ и проверить равенство $|AC| = |CA|$.

4) Привести к диагональному виду и вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 7 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \\ 5 & 6 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

5) Решить системы уравнений :

а) по формулам Крамера и матричным методом

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 7 \\ x_1 + 2x_2 = 4 \end{cases} \quad \text{б) методом Гаусса} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 9 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 9 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

Задача 2.1) Построить точки и векторы: а) $A(6, 0)$, $B(-7, 4)$, $\overline{AB}$; б) $C(3, 0, 9)$,

$D(-7, -1, 1)$, $\overline{CD}$; 2) Даны векторы: $\overline{a}(1, 4)$, $\overline{b}(3, 1)$. Вычислить и изобразить в системе координат следующие линейные комбинации этих векторов

$$2\overline{a} - \overline{b}, \overline{a} + \frac{\overline{a} - \overline{b}}{2}. 3) \text{ Найти линейную комбинацию векторов: } \overline{a}(3, 6, 4, 10),$$

$\overline{b}(1, 1, 8, 1), \overline{c}(3, 1, 1, 3)$ с коэффициентами $\alpha = -10$, $\beta = -5$, $\gamma = 4$; 4) Будут ли

векторы $\overline{a}$ линейно зависимы или линейно независимы в следующих трёх случаях:

$$\text{а) } \overline{a} = (0, 2, 9, 4), \overline{b} = (2, -3, 5, 0), \overline{c} = (3, 9, 4, 2), \overline{b} = (1, 1, 1, 1);$$

Задача 3. Даны три вектора: $\overline{a}(1, 1, 2)$, $\overline{b}(1, 7, 3)$, $\overline{c}(4, 2, 6)$.

Доказать, что система $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ образует базис в $\mathbf{R}^3$. Найти разложение вектора $\overline{d}(4, 10, 7)$ по этому базису.

Задача 4.1) Даны векторы $\overline{a}(1, 5, 1)$, $\overline{b}(1, 2, 7)$. Найти $|\overline{a}|$, $|\overline{a}, \overline{b}|$, $\text{пр}_{\overline{b}}(2\overline{a} - \overline{b})$.

2) а) При каком значении x вектор $\overline{a}(2, 4, x)$ ортогонален вектору $\overline{b}(4, 1, 0)$.

б) При каких значениях x, y векторы $\overline{a}(2, 4, 5)$ и $\overline{b}(x, y, 1)$ параллельны?

- 3) Вычислить площадь и высоту треугольника с вершинами A(9,-3,1), B(-9, 0,3), C(7,-9,-2).
- 4) Вершины треугольной пирамиды находятся в точках A(-3, -3, 4), B(0, 3, 4), C(1,0,- 4), D(-2,-1, 0). Вычислить: а) объём пирамиды; б) высоту, опущенную из вершины A; 5) Выяснить, лежат ли точки D(-3,14, 2) и E(11, 2, 6) в плоскости ABC, где A(-4,-1, 0), B(0,-1,-3), C(0, 3,- 4).

Вариант 2.

Задача 1. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 1 \\ 10 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 2 \\ 1 & 9 & 7 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

- 1) Вычислить матрицу $A + 2C - 17C^T$; 2) Выполняется ли равенство $AC=CA$;
3) Вычислить определители $|A|, |C|, |AC|$ и проверить равенство $|AC| = |CA|$.

- 4) Привести к диагональному виду и вычислить определитель $\begin{vmatrix} 5 & 7 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

5) Решить системы уравнений :

а) по формулам Крамера и матричным методом

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 7 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 10 \\ x_1 + 2x_2 + 13x_3 = 13 \end{cases} \quad \text{б) методом Гаусса} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 10 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 4 \end{cases}$$

Задача 2.1) Построить точки и векторы: а) A(-1, 0), B(-7, -7), $\overline{AB}$; б) C(3, -3, 9),

D(-7, -1, 1), $\overline{CD}$; 2) Даны векторы: $\vec{a}(1,6)$, $\vec{b}(5,1)$. Вычислить и изобразить в системе координат следующие линейные комбинации этих векторов

$$2\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} + \frac{\vec{a} - \vec{b}}{2}. 3) \text{ Найти линейную комбинацию векторов: } \vec{a} = (3, 6, 4, 10),$$

$$\vec{b} = (1, 1, 1, 1), \vec{c} = (3, 1, 1, 3) \text{ с коэффициентами } \alpha = -1, \beta = -5, \gamma = 7; 4) \text{ Будут ли}$$

векторы $\vec{a}$ линейно зависимы или линейно независимы в следующих трёх случаях:

$$a) \vec{a} = (0, 2, 9, 4), \vec{b} = (2, -2, 9, 0), \vec{c} = (3, 9, 4, 7), \vec{b} = (1, 1, 1, 1);$$

Задача 3. Даны три вектора: $\vec{a} = (1, 1, 2)$, $\vec{b} = (1, 7, 3)$, $\vec{c} = (4, 2, 6)$.

Доказать, что система $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образует базис в $\mathbb{R}^3$. Найти разложение вектора $\vec{d} = (4, 10, 5)$ по этому базису.

Задача 4.1) Даны векторы $\vec{a} = (1, 2, 1)$, $\vec{b} = (1, 2, 0)$. Найти $|\vec{a}|$, $|\vec{a}, \vec{b}|$, $\text{пр}_{\vec{b}}(2\vec{a} - \vec{b})$.

2) а) При каком значении x вектор $\vec{a} = (1, 4, x)$ ортогонален вектору $\vec{b} = (6, 1, 0)$.

б) При каких значениях x, y векторы $\vec{a} = (1, 4, 5)$ и $\vec{b} = (x, y, 1)$ параллельны?

3) Вычислить площадь и высоту треугольника с вершинами A(1,-3,1), B(-9, 0,2), C(7,10,-2).

4) Вершины треугольной пирамиды находятся в точках A(-3, -3, 4), B(0, 3, 4),

$C(1,0,-4)$, $D(-1,-1,0)$. Вычислить: **а)** объём пирамиды; **б)** высоту, опущенную из вершины A ; **5)** Выяснить, лежат ли точки $D(-3,17,2)$ и $E(1,2,6)$ в плоскости ABC , где $A(-4,-1,0)$, $B(0,-1,-3)$, $C(0,3,-4)$.

**Типовой расчет по математическому анализу
(техника дифференцирования и вычисление пределов)**

Вариант 1.

Задача 1.

Вычислить производные следующих функций

$$1) y = x^4 - 6x^3 - 8x + 3 - \frac{2}{x^3} - \frac{1}{4x};$$

$$2) y = 5\sqrt{x} - 2 - \frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{7}{x^5} - \sqrt[4]{x^5};$$

$$3) y = \frac{7x-8}{4x-5} - \frac{e^x}{x^8} - 5x - \cos x - \sqrt[3]{x} - 3;$$

$$4) y = \cos(7x-5) - \operatorname{arctg}(4-3x) - \ln(9x-4) - \frac{1}{6^{3x}};$$

$$5) y = \sin(9-x) - \frac{1}{\sqrt{x-3}} - e^{3x-5} - \frac{6x-5}{x^2};$$

$$6) y = x^8 - 9 - \arccos e^{3x} - \frac{8x-1}{x^2} \ln 3x;$$

$$7) y = \sin(9x-8) - e^{x^2} - \ln \operatorname{tg} 2x;$$

$$8) y = 2^{\operatorname{tg} 4x} - \frac{\sin(2x-3)}{x^5 - x^2};$$

$$9) y = 2^{5 \arcsin_3 x};$$

$$10) y = \operatorname{arctg}^7 \ln(5x^2 - 8x - 2);$$

$$11) y = x^3 - 6 - \frac{\sin(6x-5)}{3 - 2x - 2};$$

$$12) y = e^x - \operatorname{ctg} \frac{7x}{x^2 - 1} - \sin^4 x^7 - 4^{\sin x};$$

$$13) y = \ln \operatorname{tg}(6x-3)^2 - \frac{\cos(7x-2)^4}{x^6 - 7};$$

$$14) y = \frac{8x-3}{x^2} - \ln \frac{5x-1}{6x-8} - e^{\operatorname{ctg} 5x};$$

$$15) y = (\arcsin x)^{e^x};$$

$$16) y = \frac{1}{x \ln x};$$

Задача 2.

Вычислить производные $y' = y'(x)$ функций, заданных неявно, и функций, заданных параметрически.

$$1) x^4 - 6xy^3 - 9y^4 - 3x^2 - 100 = 0;$$

$$2) \sin(y - x^2) = 2 - \frac{x}{x^2} - 3;$$

$$3) \begin{cases} x = 3t - 2 \\ y = 4t^3 \end{cases};$$

$$4) \begin{cases} x = a \cos^2 t \\ y = b \sin^2 t \end{cases};$$

Задача 3.

Исследовать функцию на непрерывность. Указать точки разрыва и характер разрыва.

$$1) y = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{если } x \neq 1, \\ 2x, & \text{если } 1 < x < 3, \\ x - 2, & \text{если } x \geq 3 \end{cases}; \quad 2) y = \frac{x-3}{(x-1)^2}; \quad 3) y = \frac{x-4}{(x-1)(x-1)}; \quad 4) y = \frac{1}{e^{\frac{1}{x-2}}}.$$

Задача 4.

Найти пределы функций, не используя правило Лопиталя.

1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 1};$

6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\operatorname{arctg}(x^3 - x)};$

11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \sin 5x}{\sin 7x};$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x}{e^{\frac{1}{x^2}}};$

7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{3x}}{x};$

12) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 - 5x^2 - 4x - 15}{9x^3 - 66x^2 - 99x - 1};$

3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 3x + 1}{2x^3 - 4x - 7};$

8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 1}{x^2 - 1};$

13) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x - \pi) - \sin \pi}{x};$

4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3^x}{\lg 2x};$

9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2};$

14) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 1}{3x};$

5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{\ln(1 + 3x)};$

10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 5x^2 - 4x - 7}{x^3 - 8x - 12};$

Задача 5.

Найти следующие пределы, используя правило Лопиталя.

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 2x + 5}{4x^3 - x + 7};$

5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{1 - \cos 8x};$

9) $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x;$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5 - 5x^2 + 7}{3x^4 - 8};$

6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2x};$

10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x};$

3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{6x^2};$

7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x^2};$

11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x}{x};$

4) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin x}{\sin \frac{x}{2}};$

8) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin 3x}{(x - \frac{\pi}{2})^2};$

Вариант 2.

Задача 1.

Вычислить производные следующих функций

$$1) y = x^3 + 6x^7 + 5x + 4 + \frac{1}{3x};$$

$$2) y = \sqrt[3]{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{x}{5} + \sqrt[5]{x};$$

$$3) y = \frac{5x + 6}{7x + 9} + 6x^{\frac{1}{2}} \sin x + (x^2 + x + 5) \cdot 4^x;$$

$$4) y = \operatorname{tg}(5x + 6) + \arcsin(7x + 2) + e^{4x+3} + 2^{x^2};$$

$$5) y = \operatorname{arctg} 5x + \frac{2}{x + 3} + \sqrt[4]{6x + 7} + \ln(7 + x);$$

$$6) y = \sqrt[7]{x} + 9 + \arcsin e^{x^2} + \sqrt{\sin 8x + \ln 3x};$$

$$7) y = \ln \sin(2x + 1) + 2^{\operatorname{tg} 3x} + \cos^2(2x^3);$$

$$8) y = x^3 + 10x^{\frac{1}{2}} + \frac{\sin(x + \sqrt[4]{x})}{\ln^2(1 - x)};$$

$$9) y = 2^{6 \operatorname{arctg} 3x};$$

$$10) y = \operatorname{arccotg}^2 \ln(10x^3 + 2x + 2);$$

$$11) y = \sqrt[4]{x} + 6 \sqrt[3]{\frac{\cos(4x + 8)}{x^3 + 8x + 3}};$$

$$12) y = e^{x^2} + \frac{8x}{x^3 + 1} + \sin^5 x^5 + 9^{\cos x};$$

$$13) y = \ln \operatorname{ctg}(2x + 6)^3 + \frac{\sin(9x + 1)^3}{x^6 + 3};$$

$$14) y = \sqrt[4]{x} + \sqrt[5]{x} + \ln \frac{6x + 7}{8x + 9} + e^{\operatorname{tg} 4x};$$

$$15) y = x^{\arcsin x};$$

$$16) y = (\ln x)^x.$$

Задача 2.

Вычислить производные $y' = y'(x)$ функций, заданных неявно, и функций, заданных параметрически.

$$1) x^{4y} + 3^{xy^3} = 5;$$

$$2) \sqrt[5]{x} + \frac{y}{e^x} + xy = 0;$$

$$3) \begin{cases} x = e^{-t} \\ y = e^{2t} \end{cases};$$

$$4) \begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = b \sin^3 t \end{cases}.$$

Задача 3.

Исследовать функцию на непрерывность. Указать точки разрыва и характер разрыва.

$$1) y = \begin{cases} x + 3, & \text{если } x < 0, \\ x + 1, & \text{если } 0 < x < 4, \\ x + 2, & \text{если } x > 4 \end{cases}; \quad 2) y = \frac{x + 2}{(x - 1)^2}; \quad 3) y = \frac{x^3 + 4}{(x - 1)(x - 2)}; \quad 4) y = 2^{\frac{3x}{x+3}}.$$

Задача 4.

Найти пределы функций, не используя правило Лопиталя.

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 1};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\arctg(x^2 - 2x)};$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x - \sin 5x}{\sin 3x};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2x}{e^{\frac{2}{x}} - 1};$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^x}{x};$$

$$12) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^4 - 7x + 19}{19x^3 - 66x^2 - 99x + 1};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 2x + 5}{2x^8 - 4x + 7};$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{x};$$

$$13) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2 - x) - \ln 2}{x};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\lg 3x};$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 4 + 2}{x^2 - 2 + 2};$$

$$14) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^{4x} - 2^{2x}}{5x};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg 3x}{\ln(1 + 3x)};$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 - 7x^2 + 4x + 9}{2x^4 - 7x + 112};$$

Задача 5.

Найти следующие пределы, используя правило Лопиталя.

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 3^x + 7}{2x + 9};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 4x)}{\sin x};$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 0} x e^{-x};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^4 - 3x^2 + 8}{2x^4 + 5x + 9};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - x + 5}{\sin(x - 3)};$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x^2};$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 6 + 2}{x^3 - 8};$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\arctg 4x};$$

$$8) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin 5x}{(x - \frac{\pi}{2})^2};$$

**Типовой расчет по математическому анализу
(приложение производных)**

Вариант 1

Задача 1. Написать уравнение касательной и нормали в точках с абсциссами a , b и c к кривым:

1. $y = 2x^4 - 3x^2$; $a = 1, b = 2, c = 4$; 2. $y = \sin 2x$; $a = 8, b = 12, c = 4$.

Задача 2. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на данном отрезке:

1. $y = x^3 - 6x$, $[-3; 4]$; 2. $y = x \ln x$, $[0; 4]$.

Задача 3. Найти экстремумы и интервалы монотонности функций:

1. $y = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x$; 4. $y = x \ln \frac{2}{x}$;

2. $y = 1 - 2x^2 - \frac{x^4}{4}$; 5. $y = x \ln x$;

3. $y = \frac{1}{1 - x^2}$;

Задача 4. Найти асимптоты следующих кривых:

1. $y = \frac{2}{x - 1}$; 3. $y = x^2 - \frac{1}{x}$;

2. $y = \frac{x}{x - 3}$; 4. $y = xe^{2x}$.

Задача 5. Найти точки перегиба и интервалы выпуклости функций:

1. $y = 3x^5 - 6x - 7$; 3. $y = \frac{2x^2}{1 - x^2}$;

2. $y = x^3 - 3x^2$; 4. $y = xe^{-x}$.

Задача 6. Построить графики функций:

1. $y = x^3 - 3x^2 - 2$; 2. $y = \frac{1}{x^2 - 3x - 2}$.

Задача 7. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ следующих функций:

1. $z = x^3 - 2y^2 - 6xy - 7x - 8y - 4$; 3. $z = \ln \frac{6x - 7y}{5x - 4y}$.

2. $z = \cos \sqrt{2x^2 - 3y^5} - \frac{x}{y} \operatorname{tg} \frac{x}{y}$;

Задача 8. Найти в точке A градиент функции $z = z(x, y)$ и производную в направлении вектора $\vec{l}$, если:

1. $z = y^2 \ln x$; $A(e; 1)$; $\vec{l} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$; 2. $z = x^2 - y$; $A(3; 6)$; $\vec{l} = \vec{i} - \vec{j}$.

Задача 9. Найти экстремумы функции двух переменных:

$z = x^2 - xy - 2y^2 - 3x - 2y - 2$.

Вариант 2

Задача 1. Написать уравнение касательной и нормали в точках с абсциссами a , b и c к кривым:

- $y = 2x^3 - 5x$; $a = 1, b = 2, c = 0$;
- $y = \sin 3x$; $a = \pi/9, b = \pi/6, c = \pi/4$.

Задача 2. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на данном отрезке:

- $y = x^3 - 3x^2$ на $[2; 2]$;
- $y = \frac{x}{3} - \frac{3}{x}$ на $[5; 1]$;

Задача 3. Найти экстремумы и интервалы монотонности функций:

- $y = \frac{x^4}{4} - x^3$;
- $y = \frac{x^3}{3} - x^2$;
- $y = \frac{x^2 - 6x + 13}{x - 3}$;
- $y = 2x - \frac{1}{x}$;
- $y = x^2 e^{x^2}$.

Задача 4. Найти асимптоты следующих кривых:

- $y = \frac{3}{x - 4}$;
- $y = \frac{x}{x - 5}$;
- $y = \frac{x^2 - 10x + 9}{x - 2}$;
- $y = xe^{3x}$.

Задача 5. Найти точки перегиба и интервалы выпуклости функций:

- $y = 4x^5 - 7x + 8$;
- $y = 2x^3 - 3x^2$;
- $y = \frac{x^4}{x^3 - 1}$;
- $y = xe^{2x}$.

Задача 6. Построить графики функций:

- $y = 8 - 2x + x^4$;
- $y = \frac{x^3}{3 - x^2}$.

Задача 7. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ следующих функций:

- $z = x^2 - 4y^3 - 5xy - 8x + 9y + 3$;
- $z = \sin(2x - 3y) \cdot \operatorname{ctg} \frac{x}{y}$;
- $z = \arcsin \frac{2x - y}{5x - y} + 2^{x_2 - 4y}$.

Задача 8. Найти в точке A градиент функции $z(x, y)$ и производную в направлении вектора $\vec{l}$, если:

- $z = x^2 \ln y$; $A(3; 1)$; $\vec{l} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$;
- $z = x^2 + 2y$; $A(2; 3)$; $\vec{l} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$.

Задача 9. Найти экстремумы функции двух переменных:

$$z = x^2 - xy - y^2 - 9x - 6y + 20.$$

Типовой расчет по математическому анализу (интегрирование)

Вариант №1

I. Найти интегралы, используя табличные формулы и свойство линейности.

1) $\int (5x^4 - 7x^2 + x) dx$

2) $\int (4e^x - 5\sin x) dx$

3) $\int \frac{x^3 dx}{x^2 + 1}$

4)

$\int \frac{11 - 5x^2}{1 + x^2} dx$

5) $\int \sqrt{x} dx$

6) $\int \frac{tg x}{\sin 2x} dx$

II. Найти интегралы методом подстановки.

1) $\int \frac{e^x dx}{e^x - 1}$

2) $\int \frac{dx}{x \ln x}$

3) $\int \frac{x dx}{x^2 + 5}$

4) $\int \frac{dx}{\sin^2 7x}$

5) $\int \frac{2}{\sin^8 x} \cos^5 x dx$

6) $\int \frac{6tg^2 x - 5tg x + 1}{\cos^2 x} dx$

7) $\int \sqrt{x^2 + 4} dx$

8) $\int \frac{x - 4 \arctg x}{1 + x^2} dx$

9) $\int \frac{x}{1 + x^2} dx$

10) $\int \frac{1 - x}{x^2 + 1} dx$

III. Выполнить интегрирование почастям.

1) $\int x e^x dx$

3) $\int \frac{x dx}{\cos^2 x}$

5) $\int x \arctg x dx$

2) $\int \arccos 3x dx$

4) $\int x^2 \sin 3x dx$

6) $\int \cos \ln x dx$

IV. Вычислить интегралы от рациональных дробей.

1)

$\int \frac{x^2 + 2x + 5}{x^2 + 5x + 6} dx$

2)

$\int \frac{x dx}{x^2 + 1} - \frac{2}{x + 4}$

3)

$\int \frac{11x + 6}{x^2 + 1} - \frac{2}{x + 2} dx$

V. Вычислить по таблицам.

1)

$\int \frac{5x + 7}{x^2 + 2x + 10} dx$

2)

$\int x \arctg \frac{x}{3} dx$

3)

$\int \frac{3}{\ln 3x + 1} dx$

4)

$\int \frac{dx}{\sin x}$

Вариант №2

I. Найти интегралы, используя табличные формулы и свойство линейности.

1) $\int (2x^5 - 7x^3 + x - \frac{3}{2}) dx$

2) $\int (3^x - 4\cos x + e^x + x) dx$

3) $\int (3x^3 - 4x^2 + 3x) dx$

4) $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sin 2x} dx$

5) $\int \sqrt[3]{1 + e^{\frac{1}{x^3}}} dx$

6) $\int \frac{5}{1 + x^2} dx$

7) $\int \frac{3}{1 + x^2} dx$

II. Найти интегралы методом подстановки.

1) $\int \frac{\ln x + 1}{x + \ln^2 x} dx$

2) $\int \frac{x^2 dx}{x^6 + 9}$

3) $\int \sin^5 x dx$

4) $\int \frac{x^4 dx}{x^5 + 16}$

5) $\int \frac{dx}{e^{x^2} \sin^2 e^x}$

6) $\int \frac{2 \arctg x + x}{1 + x^2} dx$

7) $\int \frac{dx}{x^2 \cos^2 \frac{1}{x}}$

8) $\int \frac{dx}{x^2 + x^4}$

9) $\int \frac{dx}{x^2 + 1}$

10) $\int \frac{x \sin x}{2 \cos x} dx$

III. Выполнить интегрирование почастям.

1) $\int x e^{-x} dx$

3)

$\int x \arctg x dx$

5) $\int x \sin 3x dx$

2) $\int \frac{x \cos x dx}{\sin^5 x}$

4) $\int \frac{\ln^2 x}{x^3} dx$

6) $\int \frac{e^x}{x} dx$

IV. Вычислить интегралы от рациональных дробей.

1) $\int \frac{x dx}{x^3 + 8}$

2) $\int \frac{x dx}{x^2 + 4x + 4}$

3) $\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 1}$

V. Вычислить по таблицам.

1)

$\int (3x^2 + 6x + 10) dx$

2)

$\int \sin^2 3x \cos^3 3x dx$

3)

$\int \operatorname{tg}^3 7x dx$

4)

$\int \ln \frac{2x + 3}{x} dx$

5. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

Основная литература

1. Березина, Н. А. Высшая математика : учебное пособие / Н. А. Березина. — 2-е изд. — Саратов : Научная книга, 2019. — 158 с. — ISBN 978-5-9758-1888-1. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/80978.html> — Режим доступа: для авторизир. пользователей

 2. Растопчина, О. М. Высшая математика : учебное пособие / О. М. Растопчина. — М. : Московский педагогический государственный университет, 2018. — 150 с. — ISBN 978-5-4263-0594-6. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/79053.html> — Режим доступа: для авторизир. пользователей

Дополнительная литература:

 1. Сёмина, Г. М. Высшая математика. Ряды Фурье. Преобразование Фурье : практикум / Г. М. Сёмина, И. В. Данченков. — М. : Издательский Дом МИСиС, 2018. — 47 с. — ISBN 978-5-906846-84-6. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/78569.html> — Режим доступа: для авторизир. пользователей

2. Растопчина, О. М. Высшая математика : практикум / О. М. Растопчина ; под редакцией А. И. Нижников, Т. Н. Попова. — М. : Московский педагогический государственный университет, 2017. — 138 с. — ISBN 978-5-4263-0534-2. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/72486.html> — Режим доступа: для авторизир. пользователей

3. Магазинников, Л. И. Высшая математика. Дифференциальное исчисление : учебное пособие / Л. И. Магазинников, А. Л. Магазинников. — Томск : Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, 2017. — 188 с. — ISBN 978-5-4332-0114-9. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/72078.html> — Режим доступа: для авторизир. пользователей

4. Горюшкин, А. П. Математика : учебное пособие / А. П. Горюшкин ; под редакцией М. И. Вединчара. — Саратов : Ай Пи Эр Медиа, 2019. — 824 с. — ISBN 978-5-4486-0735-6. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/83654.html> — Режим доступа: для авторизир. пользователей

Периодические издания

1. Вестник Липецкого государственного технического университета [Электронный ресурс] — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/59075.html> - ЭБС «IPRbooks»

2. Вестник Российского университета дружбы народов. Серия Математика. Информатика. Физика [Электронный ресурс] — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/32515.html> - ЭБС «IPRbooks»



Программное обеспечение

 Microsoft Windows, Microsoft Office

Базы данных, информационно-справочные и поисковые системы, Интернет-ресурсы

Базы данных (профессиональные базы данных)

— База данных веб-технологий — <http://www.php.su>

— База данных IT специалиста— Режим доступа: <http://info-comp.ru/>

Информационно-справочные системы

— Справочно-правовая система «КонсультантПлюс» — <http://www.consultant.ru/>

— 1С: Библиотека — АНО ВО СКСи

Поисковые системы

- <https://www.yandex.ru/>
- <https://www.rambler.ru/>
- <https://accounts.google.com/>
- <https://www.yahoo.com/>

Электронные образовательные ресурсы

- Корпорация Майкрософт в сфере образования [Электронный ресурс]– Режим доступа: <https://www.microsoft.com/ru-ru/education/default.aspx>
- Электронная библиотечная система «IPRbooks»– Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/>

6. Практические занятия по дисциплине

Тема занятий «Определители. Системы линейных уравнений. Матрицы».

Цель занятия: Познакомить студентов с основами линейной алгебры. Научить вычислять определители различных порядков, производить действия над матрицами и применять полученные навыки для решения систем линейных алгебраических уравнений.

Задания

Задание 1. Даны матрицы A и B . Найти $C = 2A^2 - 3A^{-1} + 2E$, $D = A^{-T}B$

№ варианта	Матрицы A, B	№ варианта	Матрицы A, B
1	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$	2	$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$ $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$
3	$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$	4	$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$ $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
5	$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}$	6	$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix},$ $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$
7	$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	8	$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix},$

8

6

3

B

2

0

2

A

2

5

0

B

0

3

B

2

3

5

A

3

0

1

B

9

10

Задание 2. Найти ранг матрицы A , используя метод нулей и единиц. Указать базисный минор.

№ варианта	Матрица A	№ варианта	Матрица A
1	2 3 8 11 A	2	5 4 13 17 A
3	1 2 1 3 A	4	1 3 7 2 A
5	3 4 5 7 A	6	1 7 2 13 A
7	1 2 1 4 A	8	2 6 2 8 A

1	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$	2	$\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 10 & 19 \\ 10 \end{bmatrix}$
3	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$	4	$\begin{bmatrix} 12 & 24 & 13 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
5	$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	6	$\begin{bmatrix} 0 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 13 & 0 \end{bmatrix}$
7	$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$	8	$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$
9	$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$	10	$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Вариант 1

Даны матрицы $A = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 1 \\ 10 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ и $C = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 2 \\ 1 & 9 & 7 \\ 7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

1) Вычислить матрицу $A + 2C - 17C^T$;

2) Выполняется ли равенство $AC=CA$?

3) Вычислить определители $|A|, |C|, |AC|$ и проверить равенство $|AC| = |CA|$.

4) Привести к диагональному виду и вычислить определитель $\begin{vmatrix} 5 & 7 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

5) Решить системы уравнений :

а) по формулам Крамера и матричным методом

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 7 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 10 \\ x_1 + 2x_2 = 13 \end{cases} \quad \text{б) методом Гаусса}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 8 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 4 \end{cases}$$

Вариант 2

Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 1 \\ 10 & 10 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 25 & 7 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

1) Вычислить матрицу $A - 2C - C^T$;

2) Выполняется ли равенство $AC = CA$?

3) Вычислить определители $|A|$, $|C|$, $|AC|$ и проверить равенство $|AC| = |CA|$.

4) Привести к диагональному виду и вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \\ 5 & 6 & 7 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

5) Решить системы уравнений :

а) по формулам Крамера и матричным методом

$$\begin{cases} x + x + 3x = 15 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 13 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 23 \end{cases} \quad \text{б) методом Гаусса}$$

$$\begin{cases} 3x + x + 2x + x = 7 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 6 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \end{cases}$$

Вариант 3

Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 1 \\ 16 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 & 0 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

1) Вычислить матрицу $5A + 3C - C^T$; 2) Выполняется ли равенство $AC = CA$?

3) Вычислить определители $|A|$, $|C|$, $|AC|$ и проверить равенство $|AC| = |CA|$.

4) Привести к диагональному виду и вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 4 & 7 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

5) Решить системы уравнений :

а) по формулам Крамера и матричным методом

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$$

б) методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 8 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$$

Вариант 4

Даны матрицы $A = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \\ 16 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ $C = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 6 & 0 \\ 7 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

1) Вычислить матрицу $A + 2C - C^T$; 2) Выполняется ли равенство $AC=CA$?

3) Вычислить определители $|A|, |C|, |AC|$ и проверить равенство $|AC| = |CA|$.

4) Привести к диагональному виду и вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 4 & 7 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

5) Решить системы уравнений :

а) по формулам Крамера и матричным методом

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 = 13 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\ x_1 + 3x_2 = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

б) методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 12 \end{cases}$$

Вариант 5

Задача 1. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 15 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ и $C = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 1 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

1) Вычислить матрицу $6A + 2C - C^T$; 2) Выполняется ли равенство $AC=CA$?

3) Вычислить определители $|A|, |C|, |AC|$ и проверить равенство $|AC|=|CA|$.

4) Привести к диагональному виду и вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 9 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

5) Решить системы уравнений:

а) по формулам Крамера и матричным методом

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 = 9 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x_1 + x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

б) методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 7 \end{cases}$$

Вариант 6

Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 15 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ и $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

1) Вычислить матрицу $A + 2C - 3C^T$;

2) Выполняется ли равенство $AC=CA$?

3) Вычислить определители $|A|, |C|, |AC|$ и проверить равенство $|AC|=|CA|$.

4) Привести к диагональному виду и вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & 9 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

5) Решить системы уравнений :

а) по формулам Крамера и матричным методом

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 = 7 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 9 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x_1 + x_3 = 3 \\ 15x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 8 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

б) методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 7 \\ 2x_1 - 7x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \end{cases}$$

Вариант 7

Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 15 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ и $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 5 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

1) Вычислить матрицу $A + 5C - 7C^T$; 2) Выполняется ли равенство $AC=CA$?

3) Вычислить определители $|A|, |C|, |AC|$ и проверить равенство $|AC| = |C| \cdot |A|$.

4) Привести к диагональному виду и вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 & 1 \\ 3 & 8 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

5) Решить системы уравнений:

а) по формулам Крамера и матричным методом

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 8 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 13 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

б) методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 11 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 10 \\ 2x_1 - 7x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 6 \end{cases}$$

Вариант 8

Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 15 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ и $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

1) Вычислить матрицу $A + 5C - 2C^T$; 2) Выполняется ли равенство $AC=CA$?

3) Вычислить определители $|A|, |C|, |AC|$ и проверить равенство $|AC| = |C| \cdot |A|$.

4) Привести к диагональному виду и вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 7 & 6 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & 8 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

5) Решить системы уравнений:

а) по формулам Крамера и матричным методом

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 = 8 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

б) методом Гаусса

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8 \\ 12x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11 \\ 8 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix}$$

Вариант 9

Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 9 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

1) Вычислить матрицу $2A + 3C + C^T$; 2) Выполняется ли равенство $AC=CA$?

3) Вычислить определители $|A|$, $|C|$, $|AC|$ и проверить равенство $|AC|=|CA|$.

4) Привести к диагональному виду и вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 & 7 \\ 4 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 3 & 7 \\ 8 & 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

5) Решить системы уравнений:

а) по формулам Крамера и матричным методом

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 5 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 6 \\ 2x_1 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 2 \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 10x_3 = 1 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 5 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 12 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 3 \end{cases}$$

б) методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 5 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 12 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 3 \end{cases}$$

Вариант 10

Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

1) Вычислить матрицу $4A - C + 6C^T$; 2) Выполняется ли равенство $AC=CA$?

3) Вычислить определители $\begin{vmatrix} A & C \\ C & A \end{vmatrix}$ и проверить равенство $\begin{vmatrix} AC & CA \\ CA & AC \end{vmatrix}$.

4) Привести к диагональному виду и вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 2 & 2 \\ 5 & 2 & 3 & 1 \\ 8 & 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

5) Решить системы уравнений:

а) по формулам Крамера и матричным методом

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 7x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + 9x_3 = 17 \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 10x_3 = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 5x_4 = 5 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 1 \end{cases}$$

б) методом Гаусса

Методические указания по выполнению заданий

Для выполнения заданий необходимо изучить лекции 1-4. При этом следует учитывать, что для решения СЛАУ необходимо умение вычислять определители и выполнять элементарные преобразования над матрицами. В связи с этим, не рекомендуется начинать решение с задания 3 или 4.

Практическое занятие

Тема занятия «Линейное векторное пространство»

Цель занятия: Познакомить студентов с основами векторной алгебры. Научить вычислять скалярное произведение векторов, находить модуль векторного произведения, вычислить смешанное произведение трёх векторов.

Задание

Даны векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Необходимо: а) вычислить скалярное произведение векторов $2\vec{a}$, $9\vec{b}$; б) найти модуль векторного произведения $3\vec{a}$ и $5\vec{c}$; в) вычислить смешанное произведение трёх векторов $4\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$; г) проверить будут ли коллинеарными или ортогональными два вектора $\vec{a}$, $\vec{c}$; д) проверить будут ли компланарны три вектора $7\vec{a}$, $5\vec{b}$, $\vec{c}$.

№ варианта	Вектор $\vec{a} \square \vec{a} \vec{i} \square \vec{a} \vec{j} \square \vec{a} \vec{k}$	Вектор $\vec{b} \square \vec{b} \vec{i} \square \vec{b} \vec{j} \square \vec{b} \vec{k}$	Вектор $\vec{c} \square \vec{c} \vec{i} \square \vec{c} \vec{j} \square \vec{c} \vec{k}$
1	$a \square i \quad j \quad k$ $2 \square 3 \square$	$b \square j \square 4k$	$c \square 5i \square 2j \square 3k$
2	$a \square i \quad j \quad k$ $3 \square 4 \square$	$b \square i \square 2j \square 7k$	$c \square 3i \square 6j \square 21k$
3	$a \square 2i \square 4j \square 2k$	$\square \quad \square$	$c \square 3i \square 5j \square 7k$
4	$a \square \square 7i \square 2k$	$b \square 7i \quad 3k$ $b \square 2i \square 6j \square 4k$	$c \square i \square 3j \square 2k$
5	$a \square \square 4i \square 2j \square k$	$\square \quad \square \quad \square$ $b \square 3i \quad 5j \quad 2k$	$c \square j \square 5k$
6	$a \square 3 \square 2j \square k$ i	$b \square 2j \square 3k$	$c \square \square 3i \square 2j \square k$
7	$a \square 4i \square j \square 3k$	$b \square 2i \square 3j \square 5k$	$c \square 7i \square 2j \square 4k$
8	$a \square 4i \square 2j \square 3k$	$\square \quad \square$ $b \square 2i \quad k$	$c \square \square 12i \square 6j \square 9k$
9	$a \square \square i \square 5k$	$b \square \square 3i \square 2j \square 2k$	$c \square \quad i \quad j \quad k$ $\square 2 \square 4 \square$
10	$\square \quad \square \quad \square$ $a \square 6i \quad 4j \quad 6k$	$b \square 9i \square 2 \square 6j \square 9$	$\square \quad \square$ $c \square i \quad 8k$

Вариант 1

Задача 1.

1) Построить точки и векторы: а) A(6, 0), B(-7, 4), $\vec{AB}$; б) C(3, 0, 9), D(-7, -1, 1), $\vec{CD}$;

2) Даны векторы: $\vec{a}(1, \square 4)$, $\vec{b}(3, \square 1)$. Вычислить и изобразить в системе координат следующие линейные комбинации этих векторов

$$2 \square \vec{a} \square \vec{b}, \vec{a} \square \frac{\vec{a} \square \vec{b}}{2}.$$

3) Найти линейную комбинацию векторов: $\vec{a} \square (\square 3, 6, 4, 10)$, $\vec{b} \square (1, 1, 8, \square 1)$, $\vec{c} \square (3, 1, \square 1, 3)$ с коэффициентами $\square = -10$, $\square = -5$, $\square = 4$;

4) Будут ли векторы линейно зависимы или линейно независимы в следующих трёх случаях:

а) $\vec{a} \square (\square 1, 9)$, $\vec{b} \square (2, \square 2)$; б) $\vec{a} \square (\square 2, \square 2, \square 2)$, $\vec{b} \square (1, \square \vec{e}, \square 1)$;

в) $\vec{a} \square (0, 2, \square 1)$, $\vec{b} \square (\square 5, 2, 0)$, $\vec{c} \square (3, \square 9, 4)$.

Задача 2. Даны три вектора: $\vec{a} = (1, 1, 2)$, $\vec{b} = (1, 7, 3)$, $\vec{c} = (4, 2, 6)$. Доказать, что система $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образует базис в $\mathbb{R}^3$. Найти разложение вектора $\vec{v} = (7, 10, 1)$ по этому базису.

Задача 3.1) Даны векторы $\vec{a} = (1, 5, 1)$, $\vec{b} = (1, 2, 7)$. Найти $\vec{a} \times \vec{b}$ и $(\vec{a}, \vec{b})$, $\text{пр}_{\vec{b}}(\vec{a})$.

2) а) При каком значении x вектор $\vec{a} = (2, 4, x)$ ортогонален вектору $\vec{b} = (4, 1, 0)$.

б) При каких значениях x, y векторы $\vec{a} = (2, 4, 5)$ и $\vec{b} = (x, y, 1)$ параллельны?

3) Вычислить площадь и высоту треугольника с вершинами $A(9, -3, 1)$, $B(-9, 0, 3)$, $C(7, -9, -2)$.

4) Вершины треугольной пирамиды находятся в точках $A(-3, -3, 4)$, $B(0, 3, 4)$, $C(1, 0, -4)$, $D(-2, -1, 0)$. Вычислить: а) объём пирамиды; б) высоту, опущенную из вершины A ;

5) Выяснить, лежат ли точки $D(-3, 14, 2)$ и $E(11, 2, 6)$ в плоскости ABC , где $A(-4, -1, 0)$, $B(0, -1, -3)$, $C(0, 3, -4)$.

Вариант 2

Задача 1.

1) Построить точки и векторы: а) $A(-1, 0)$, $B(-7, -7)$, $\vec{AB}$; б) $C(3, -3, 9)$, $D(-7, -1, 1)$, $\vec{CD}$;

2) Даны векторы: $\vec{a} = (1, 6)$, $\vec{b} = (5, 1)$. Вычислить и изобразить в системе координат следующие линейные комбинации этих векторов

$$2\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} - 2\vec{b}.$$

3) Найти линейную комбинацию векторов: $\vec{a} = (3, 6, 4, 10)$,

$\vec{b} = (1, 1, 1, 1)$, $\vec{c} = (3, 1, 1, 3)$ с коэффициентами $\alpha = -1$, $\beta = -5$, $\gamma = 7$; 4)

Будут

ли векторы линейно зависимы или линейно независимы в следующих трёх случаях: а) $\vec{a} = (1, 9)$, $\vec{b} = (2, 2)$; б) $\vec{a} = (2, 3, 7)$, $\vec{b} = (1,$

в) $\vec{a} = (0, 2, 1)$, $\vec{b} = (5, 1, 0)$, $\vec{c} = (3, 9, 4)$.

Задача 2. Даны три вектора: $\vec{a} = (1, 1, 2)$, $\vec{b} = (1, 7, 3)$, $\vec{c} = (4, 2, 6)$. Доказать, что система $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образует базис в $\mathbb{R}^3$. Найти разложение вектора $\vec{v} = (7, 10, 1)$ по этому базису.

Задача 3.1) Даны векторы $\vec{a} = (1, 2, 1)$, $\vec{b} = (1, 2, 0)$. Найти $\vec{a} \times \vec{b}$ и $(\vec{a}, \vec{b})$, $\text{пр}_{\vec{b}}(\vec{a})$.

2) а) При каком значении x вектор $\vec{a} = (1, 4, x)$ ортогонален вектору $\vec{b} = (6, 1, 0)$.

б) При каких значениях x, y векторы $\vec{a} = (1, 4, 5)$ и $\vec{b} = (x, y, 1)$ параллельны?

3) Вычислить площадь и высоту треугольника с вершинами A(1, -3, 1), B(-9, 0, 2), C(7, 10, -2).

4) Вершины треугольной пирамиды находятся в точках A(-3, -3, 4), B(0, 3, 4),

C(1, 0, -4), D(-1, -1, 0). Вычислить: а) объём пирамиды; б) высоту, опущенную из вершины A;

5) Выяснить, лежат ли точки D(-3, 17, 2) и E(1, 2, 6) в плоскости ABC, где A(-4, -1, 0), B(0, -1, -3), C(0, 3, -4).

Вариант 3

Задача 1.

1) Построить точки и векторы: а) A(6, 9), B(-7, 4), $\vec{AB}$; б) C(3, 4, 9), D(-7, -1, 1), $\vec{CD}$;

2) Даны векторы: $\vec{a}(1, 1)$, $\vec{b}(3, 1)$. Вычислить и изобразить в системе координат следующие линейные комбинации этих векторов

$$2\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} + \frac{\vec{b}}{2}.$$

3) Найти линейную комбинацию векторов: $\vec{a}(2, 6, 4, 10)$,

$\vec{b}(1, 8, 1, 1)$, $\vec{c}(3, 1, 1, 3)$ с коэффициентами $\alpha = -10$, $\beta = -6$, $\gamma = 4$;

4)

Будут ли векторы линейно зависимы или линейно независимы в следующих трёх случаях: а) $\vec{a}(1, 3)$, $\vec{b}(2, 2)$; б) $\vec{a}(2, 3, 7)$, $\vec{b}(15, 9, 21)$;

в) $\vec{a}(0, 2, 1)$, $\vec{b}(7, 1, 0)$, $\vec{c}(3, 9, 3)$; г) $\vec{a}(1, 1, 2)$, $\vec{b}(1, 4, 3)$, $\vec{c}(4, 2, 1)$.

Задача 2. Даны три вектора: $\vec{a}(1, 1, 2)$, $\vec{b}(1, 4, 3)$, $\vec{c}(4, 2, 1)$. Доказать, что система $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образует базис в $\mathbb{R}^3$. Найти разложение

Задача 3.1) Даны векторы $\vec{a}(3, 2, 1)$, $\vec{b}(1, 2, 0)$. Найти $\vec{a}$ по $(\vec{a}, \vec{b})$, $\text{пр}_{\vec{b}}(\vec{a})$.

2) а) При каком значении x вектор $\vec{a}(1, 1, x)$ ортогонален вектору $\vec{b}(6, 1, 0)$.

б) При каких значениях x, y векторы $\vec{a}(1, 3, 5)$ и $\vec{b}(x, y, 1)$ параллельны?

3) Вычислить площадь и высоту треугольника с вершинами A(0, 12, 1), B(-9, 0, 2), C(7, -9, 0).

4) Вершины треугольной пирамиды находятся в точках A(-5, 6, 4), B(0, 3, 4), C(1, 0, -4), D(-5, -1, -1). Вычислить: а) объём пирамиды; б) высоту, опущенную из вершины A.

5) Выяснить, лежат ли точки D(-3,17,0) и E(0,2,6) в плоскости ABC, где A(-4,-1,0), B(-2,-1,1), C(0,9,-4).

Вариант 4

Задача 1.

1) Построить точки и векторы: а) A(-1, -2), B(-7, 1), $\overrightarrow{AB}$; б) C(3, -4, 2), D(-8, -1, 2), $\overrightarrow{CD}$;

2) Даны векторы: $\vec{a}(1, 11)$, $\vec{b}(6, 1)$. Вычислить и изобразить в системе координат следующие линейные комбинации этих векторов

$$2\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} - \frac{\vec{b}}{2}.$$

3) Найти линейную комбинацию векторов: $\vec{a}(1, 6, 4, 1)$,

$\vec{b}(5, 1, 1, 4)$, $\vec{c}(3, 1, 8, 3)$ с коэффициентами $\alpha = 0$, $\beta = -2$, $\gamma = 7$; 4) Будут ли

векторы линейно зависимы или линейно независимы в следующих трёх случаях: а) $\vec{a}(1, 9)$, $\vec{b}(2, 2)$; б) $\vec{a}(2, 2, 2)$, $\vec{b}(3,$

в) $\vec{a}(0, 2, 1)$, $\vec{b}(4, 2, 0)$, $\vec{c}(3, 9, 4)$.

Задача 2. Даны три вектора: $\vec{a}(4, 1, 2)$, $\vec{b}(7, 7, 3)$, $\vec{c}(4, 3, 6)$.

Доказать, что система $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ образует базис в $\mathbb{R}^3$. Найти разложение вектора $\vec{d}(1, 7, 11)$ по этому базису.

Задача 3.1) Даны векторы $\vec{a}(1, 12, 1)$, $\vec{b}(20, 2, 7)$. Найти $\vec{a} \times \vec{b}$

$(\vec{a}, \vec{b})$, $\text{пр}_{\vec{b}}(2\vec{a} - \vec{b})$.

2) а) При каком значении x вектор $\vec{a}(3, 4, x)$ ортогонален вектору $\vec{b}(4, 1, 1)$.

б) При каких значениях x, y векторы $\vec{a}(3, 4, 5)$ и $\vec{b}(x, y, 1)$ параллельны?

3) Вычислить площадь и высоту треугольника с вершинами A(0, -3, 1), B(-1, 0, 3), C(7, -9, 0).

4) Вершины треугольной пирамиды находятся в точках A(-3, 1, 4), B(0, 3, 4),

C(1, 0, -4), D(3, -1, 0). Вычислить: а) объём пирамиды; б) высоту, опущенную из вершины A;

5) Выяснить, лежат ли точки D(-3, 4, 2) и E(1, 2, 6) в плоскости ABC, где A(-4, -7, 0), B(0, -1, -9), C(0, 3, -5).

Вариант 5

Задача 1.1) Построить точки и векторы: а) A(-1, -2), B(-1, 1), $\overrightarrow{AB}$; б) C(3, -4, 2),

$D(-8, -1, 5)$, $\overrightarrow{CD}$; 2) Даны векторы: $\overrightarrow{a}(1, 11)$, $\overrightarrow{b}(6, 1)$. Вычислить и изобразить в системе координат следующие линейные комбинации этих векторов

$7\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{a} - \frac{\overrightarrow{b}}{2}$. 3) Найти линейную комбинацию векторов:

$\overrightarrow{a}(1, 6, 4)$,

$\overrightarrow{b}(5, 1, 7, 4)$, $\overrightarrow{c}(3, 2, 8, 3)$ с коэффициентами $\alpha = 0$, $\beta = -2$, $\gamma = 7$; 4) Будут ли

векторы линейно зависимы или линейно независимы в следующих трёх случаях: а) $\overrightarrow{a}(3, 9)$, $\overrightarrow{b}(2, 2)$; б) $\overrightarrow{a}(2, 4, 2)$, $\overrightarrow{b}(3, 3, 3)$

в) $\overrightarrow{a}(0, 1, 4)$, $\overrightarrow{b}(4, 2, 1)$, $\overrightarrow{c}(3, 0, 3)$.

Задача 2. Даны три вектора: $\overrightarrow{a}(4, 1, 2)$, $\overrightarrow{b}(7, 7, 3)$, $\overrightarrow{c}(1, 1, 1)$.

Доказать, что система $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\}$ образует базис в $\mathbb{R}^3$. Найти разложение вектора $\overrightarrow{d}(10, 0, 4)$ по этому базису.

Задача 3.1) Даны векторы $\overrightarrow{a}(1, 3, 5)$, $\overrightarrow{b}(10, 2, 7)$. Найти $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$

$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$, $\text{пр}_{\overrightarrow{b}}(\overrightarrow{a})$.

2) а) При каком значении x вектор $\overrightarrow{a}(1, 4, x)$ ортогонален вектору $\overrightarrow{b}(0, 1, 2)$.

б) При каких значениях x, y векторы $\overrightarrow{a}(1, 4, 8)$ и $\overrightarrow{b}(x, y, 1)$ параллельны?

3) Вычислить площадь и высоту треугольника с вершинами $A(0, -5, -1)$, $B(-1, 0, 1)$, $C(7, -9, 0)$.

4) Вершины треугольной пирамиды находятся в точках $A(-3, 2, 2)$, $B(0, 1, 4)$,

$C(1, 0, -4)$, $D(4, -7, 0)$. Вычислить: а) объём пирамиды; б) высоту, опущенную из вершины A ;

5) Выяснить, лежат ли точки $D(-9, -5, 2)$ и $E(1, 2, 6)$ в плоскости ABC , где $A(-4, -7, 0)$, $B(0, -1, -3)$, $C(0, 3, 0)$.

Вариант 6

Задача 1.

1) Построить точки и векторы: а) $A(-2, -2)$, $B(1, 1)$, $\overrightarrow{AB}$; б) $C(3, 4, 2)$, $D(-8, 7, 5)$, $\overrightarrow{CD}$;

2) Даны векторы: $\overrightarrow{a}(6, 1)$, $\overrightarrow{b}(6, 1)$. Вычислить и изобразить в системе координат следующие линейные комбинации этих векторов

$2\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{a} - \frac{\overrightarrow{b}}{2}$.

3) Найти линейную комбинацию векторов: $\overrightarrow{a}(1, 1, 1)$,

$\vec{b} = (5, 1, 7, 4), \vec{c} = (3, 2, 8, 3)$ с коэффициентами $\alpha = 8, \beta = -2, \gamma =$

4) Будут ли векторы линейно зависимы или линейно независимы в следующих трёх случаях:

а) $\vec{a} = (7, 9), \vec{b} = (2, 2)$; б) $\vec{a} = (2, 2, 2), \vec{b} = (3, 3, 3)$

в) $\vec{a} = (0, 5, 4), \vec{b} = (4, 2, 0), \vec{c} = (3, 0, 4)$.

Задача 2. Даны три вектора: $\vec{a} = (4, 1, 2), \vec{b} = (7, 7, 3), \vec{c} = (1, 1, 1)$.

Доказать, что система $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ образует базис в $\mathbb{R}^3$. Найти разложение вектора $\vec{d} = (17, 17, 17)$ по этому базису.

Задача 3.1) Даны векторы $\vec{a} = (1, 1, 5), \vec{b} = (13, 2, 7)$. Найти $[\vec{a}, \vec{b}]$

$(\vec{a}, \vec{b})$, $\text{пр}_{\vec{a}} \vec{b}$.

2) а) При каком значении x вектор $\vec{a} = (1, 4, x)$ ортогонален вектору $\vec{b} = (0, 1, 2)$.

б) При каких значениях x, y векторы $\vec{a} = (1, 4, 8)$ и $\vec{b} = (x, y, 1)$ параллельны?

3) Вычислить площадь и высоту треугольника с вершинами $A(0, -6, -1), B(-1, 0, 11), C(7, -9, 0)$.

4) Вершины треугольной пирамиды находятся в точках $A(-3, 1, 2), B(0, 1, 4),$

$C(1, 0, -4), D(4, -6, 0)$. Вычислить: а) объём пирамиды; б) высоту, опущенную из вершины A ;

5) Выяснить, лежат ли точки $D(-8, -5, 2)$ и $E(1, 3, 6)$ в плоскости ABC , где $A(-4, -7, 0), B(0, -1, -9), C(0, 3, 0)$.

Вариант 7

Задача 1.1) Построить точки и векторы: а) $A(8, -2), B(1, 1), \vec{AB}$; б) $C(3, 4, 2), D(-4, 7, 5), \vec{CD}$;

2) Даны векторы: $\vec{a} = (6, 5), \vec{b} = (6, 1)$. Вычислить и изобразить в системе координат следующие линейные комбинации этих векторов

$$3\vec{a} - \vec{b}, -\vec{a} + \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}.$$

3) Найти линейную комбинацию векторов: $\vec{a} = (1, 1, 1, 1),$

$\vec{b} = (5, 5, 7, 5), \vec{c} = (3, 2, 8, 3)$ с коэффициентами $\alpha = 8, \beta = -2, \gamma =$

4) Будут ли векторы линейно зависимы или линейно независимы в следующих трёх случаях:

а) $\vec{a} = (0, 9), \vec{b} = (2, 2)$; б) $\vec{a} = (3, 3, 3), \vec{b} = (3, 3, 3)$

в) $\vec{a} = (0, 1, 0), \vec{b} = (7, 2, 1), \vec{c} = (5, 1, 3)$.

Задача 2. Даны три вектора: $\vec{a} = (4, 1, 2)$, $\vec{b} = (0, 7, 1)$, $\vec{c} = (1, 1, 1)$. Доказать, что система $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образует базис в $\mathbb{R}^3$. Найти разложение вектора $\vec{d} = (2, 1, 1)$ по этому базису.

Задача 3.1) Даны векторы $\vec{a} = (1, 3, 9)$, $\vec{b} = (1, 2, 7)$. Найти $\text{pr}_{\vec{a}} \vec{b}$, $\text{pr}_{\vec{b}} \vec{a}$, $\text{pr}_{(\vec{a}, \vec{b})} \vec{d}$, $\text{pr}_{\vec{a}} \vec{b}$.

2) а) При каком значении x вектор $\vec{a} = (2, 3, x)$ ортогонален вектору $\vec{b} = (0, 1, 4)$.

б) При каких значениях x, y векторы $\vec{a} = (2, 3, 8)$ и $\vec{b} = (x, y, 1)$ параллельны?

3) Вычислить площадь и высоту треугольника с вершинами $A(0, -6, -3)$, $B(-2, 0, 3)$, $C(8, -4, 0)$.

4) Вершины треугольной пирамиды находятся в точках $A(-4, 2, 2)$, $B(0, 2, 4)$,

$C(1, 0, -4)$, $D(4, 4, 0)$. Вычислить: **а)** объём пирамиды; **б)** высоту, опущенную из вершины A ; **5)** Выяснить, лежат ли точки $D(-2, 2, 2)$ и $E(1, 2, 2)$ в плоскости ABC , где $A(-4, -7, 0)$, $B(0, -1, -2)$, $C(0, 4, 0)$.

Вариант 8

Задача 1.1) Построить точки и векторы: **а)** $A(5, -2)$, $B(1, 1)$, $\vec{AB}$; **б)** $C(3, 2, 2)$,

$D(-4, -2, 5)$, $\vec{CD}$; **2)** Даны векторы: $\vec{a} = (1, 5)$, $\vec{b} = (7, 1)$. Вычислить и изобразить в системе координат следующие линейные комбинации этих векторов

$2\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{a} + \vec{b}$. **3)** Найти линейную комбинацию векторов: $\vec{a} = (1, 1, 1)$,

$\vec{b} = (5, 5, 5)$, $\vec{c} = (3, 2, 3)$ с коэффициентами $\alpha = 9$, $\beta = -2$, $\gamma = 2$; **4)**

Будут

ли векторы линейно зависимы или линейно независимы в следующих трёх случаях: **а)** $\vec{a} = (3, 9)$, $\vec{b} = (2, 2)$; **б)** $\vec{a} = (2, 2, 2)$, $\vec{b} = (3, 3, 3)$

в) $\vec{a} = (0, 1, 4)$, $\vec{b} = (4, 2, 1)$, $\vec{c} = (5, 0, 3)$.

Задача 2. Даны три вектора: $\vec{a} = (4, 1, 2)$, $\vec{b} = (0, 7, 3)$, $\vec{c} = (1, 1, 1)$. Доказать, что система $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образует базис в $\mathbb{R}^3$. Найти разложение вектора $\vec{d} = (2, 1, 1)$ по этому базису.

Задача 3.1) Даны векторы $\vec{a} = (1, 3, 5)$, $\vec{b} = (0, 2, 7)$. Найти $\text{pr}_{\vec{a}} \vec{b}$, $\text{pr}_{\vec{b}} \vec{a}$, $\text{pr}_{(\vec{a}, \vec{b})} \vec{d}$, $\text{pr}_{\vec{a}} \vec{b}$.

2)а) При каком значении x вектор $\vec{a} = (2, 4, x)$ ортогонален вектору $\vec{b} = (0, 1, 3)$.

б) При каких значениях x, y векторы $\vec{a} = (2, 4, 8)$ и $\vec{b} = (x, y, 1)$ параллельны?

3) Вычислить площадь и высоту треугольника с вершинами $A(0, -5, -2)$, $B(-1, 0, 2)$, $C(7, -3, 0)$.

4) Вершины треугольной пирамиды находятся в точках $A(-3, 1, 2)$, $B(0, 2, 4)$,

$C(1, 0, -4)$, $D(4, 3, 0)$. Вычислить: а) объём пирамиды; б) высоту, опущенную из вершины A ;

5) Выяснить, лежат ли точки $D(-2, -5, 2)$ и $E(1, 2, 2)$ в плоскости ABC , где $A(-4, -7, 0)$, $B(0, -1, -2)$, $C(0, 3, 0)$.

Вариант 9

Задача 1.1) Построить точки и векторы: а) $A(9, -2)$, $B(1, 1)$, $\vec{AB}$; б) $C(3, 1)$,

$D(-4, -2, 5)$, $\vec{CD}$;

2) Даны векторы: $\vec{a}(1, 5)$, $\vec{b}(6, 1)$. Вычислить и изобразить в системе координат следующие линейные комбинации этих векторов

$$3\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} - \frac{\vec{b}}{2}.$$

3) Найти линейную комбинацию векторов: $\vec{a}(1, 1, 1)$, $\vec{b}(5, 4, 5)$, $\vec{c}(3, 2, 3)$ с коэффициентами $\alpha = 3$, $\beta = -2$, $\gamma = 2$;

Будут

ли векторы линейно зависимы или линейно независимы в следующих трёх случаях: а) $\vec{a}(2, 1)$, $\vec{b}(4, 2)$; б) $\vec{a}(1, 1)$, $\vec{b}(2, 1)$;

в) $\vec{a}(1, 1, 1)$, $\vec{b}(2, 2, 1)$, $\vec{c}(2, 1, 3)$.

Задача 2. Даны три вектора: $\vec{a}(2, 2, 3)$, $\vec{b}(0, 1, 1)$, $\vec{c}(2, 1, 1)$. Доказать, что система $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образует базис в $\mathbb{R}^3$. Найти разложение вектора $\vec{d}(1, 0, 1)$ по этому базису.

Задача 3.1) Даны векторы $\vec{a}(2, 1, 0)$, $\vec{b}(0, 2, 1)$.

$(\vec{a}, \vec{b})$, $pr_{\vec{a}}(\vec{b})$.

Найти $\vec{a}_s$

2)а) При каком значении x вектор $\vec{a} = (2, 6, x)$ ортогонален вектору $\vec{b} = (1, 3, 4)$.

б) При каких значениях x, y векторы $\vec{a} = (2, 6, 1)$ и $\vec{b} = (x, y, 1)$ параллельны?

3) Вычислить площадь и высоту треугольника с вершинами $A(7, 3, 4)$, $B(1, 0, 6)$, $C(4, 5, 7)$.

4) Вершины треугольной пирамиды находятся в точках $A(4, 6, 5)$, $B(6, 9, 4)$,

$C(2, 10, 10)$, $D(7, 5, 9)$. Вычислить: а) объём пирамиды; б) высоту, опущенную из вершины A ;

5) Выяснить, лежат ли точки $D(1, 0, 1)$ и $E(0, 1, -3)$ в плоскости ABC , где $A(5, -3, 0)$, $B(-4, 3, 3)$, $C(-4, 2, -4)$.

Вариант 10

Задача 1.

1) Построить точки и векторы: а) $A(1, 2)$, $B(2, 8)$, $\overrightarrow{AB}$; б) $C(1, 0, 2)$, $D(3, -1, 0)$, $\overrightarrow{CD}$;

2) Даны векторы: $\vec{a}(1, 2)$, $\vec{b}(3, 4)$. Вычислить и изобразить в системе координат следующие линейные комбинации этих векторов

$2\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{a} + \frac{\vec{b}}{2}$. 3) Найти линейную комбинацию векторов:

$\vec{a}(1, 2, 1, 3)$,

$\vec{b}(1, 3, 0, 8)$, $\vec{c}(7, 5, 3, 0)$ с коэффициентами $\alpha = 3$, $\beta = 4$, $\gamma = -2$; 4)

Будут

ли векторы линейно зависимы или линейно независимы в следующих трёх случаях: а) $\vec{a}(0, 7)$, $\vec{b}(2, 2)$; б) $\vec{a}(6, 4, 10)$, $\vec{b}(3, 2, 5)$;

в) $\vec{a}(0, 1, 0)$, $\vec{b}(7, 2, 2)$, $\vec{c}(5, 1, 3)$.

Задача 2. Даны три вектора: $\vec{a}(4, 1, 2)$, $\vec{b}(0, 7, 1)$, $\vec{c}(1, 1, 1)$. Доказать, что система $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образует базис в $\mathbb{R}^3$. Найти разложение вектора $\vec{d}(1, 1, 1)$ по этому базису.

Задача 3.1) Даны векторы $\vec{a}(1, 5, 9)$, $\vec{b}(3, 2, 7)$. Найти $[\vec{a}, \vec{b}]$ и $(\vec{a}, \vec{b})$, $pr_{\vec{b}}(\vec{a})$.

2) а) При каком значении x вектор $\vec{a}(5, 3, x)$ ортогонален вектору $\vec{b}(0, 1, 2)$.

б) При каких значениях x, y векторы $\vec{a}(5, 3, 8)$ и $\vec{b}(x, y, 1)$ параллельны?

3) Вычислить площадь и высоту треугольника с вершинами $A(0, -8, -3)$, $B(-2, 0, 3)$, $C(8, -4, 1)$.

4) Вершины треугольной пирамиды находятся в точках $A(-4, -2, 5)$, $B(0, 1, 4)$,

$C(1, 0, 4)$, $D(4, -4, 0)$. Вычислить: а) объём пирамиды; б) высоту, опущенную из вершины A ;

5) Выяснить, лежат ли точки $D(-2, 3, 2)$ и $E(-1, 2, 2)$ в плоскости ABC , где $A(-4, -7, 0)$, $B(0, -1, 3)$, $C(0, 4, 5)$.

Для выполнения предложенных заданий на практических занятиях необходимо изучить материал лекции по данной теме. Основные определения и теоремы. При этом следует учитывать, что предложенный в лекции материал частично опирается на некоторые разделы из школьного курса математики, которые также желательно было бы повторить для хорошего и полного усвоения дисциплины.

Практическое занятие

Тема занятия «Элементы аналитической геометрии»

Цель занятия: познакомить студентов с основными понятиями аналитической геометрии на плоскости и в пространстве. Научить решать типовые задачи.

Задания

Типовая задача 1:

1.1 Уравнение прямой на плоскости.

Даны координаты вершины треугольника ABC найти:

а) медиану AD ; б) угол $\angle DAC$; в) прямую, перпендикулярную прямой AD и проходящую через точку C ; г) прямую, параллельную прямой AD и проходящую через точку B ; д) расстояние от точки B до прямой AC .

№ варианта	Координаты точки A	Координаты точки B	Координаты точки
1	(0, 1)	(1, 4)	(-3, 2)
2	(-1, 1)	(0, 5)	(-4, 1)
3	(2, -1)	(-3, 1)	(1, 5)
4	(0, -2)	(-2, 5)	(0, -1)
5	(-2, 1)	(-5, 4)	(3, -2)
6	(1, 0)	(4, -5)	(2, -3)
7	(1, 1)	(2, -5)	(2, 3)
8	(1, -1)	(-7, 0)	(5, -4)
9	(-1, 1)	(3, -3)	(-5, 1)
10	(2, -3)	(4, -2)	(-2, 4)

1.2 Уравнение прямой в пространстве.

Даны четыре точки A_1, A_2, A_3, A_4 . Составить уравнения: а) плоскости $A_1A_2A_3$; б) прямой A_1A_2 ; в) прямой A_4M перпендикулярной к плоскости $A_1A_2A_3$; г) плоскости, проходящей через точку A_4 перпендикулярно прямой A_1A_2 .
Вычислить: д) синус угла между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$; е) косинус угла между координатной плоскостью Oxy и плоскостью $A_1A_2A_3$.

№ варианта	Точка $A_1(x; y; z)$	Точка $A_2(x; y; z)$	Точка $A_3(x; y; z)$	Точка $A_4(x; y; z)$
1	$A_1(1; 8; 2)$	$A_2(5; 6; 2)$	$A_3(5; 7; 4)$	$A_4(4; 10; 9)$
2	$A_1(10; 9; 6)$	$A_2(2; 8; 2)$	$A_3(9; 8; 9)$	$A_4(7; 10; 3)$
3	$A_1(3; 5; 4)$	$A_2(8; 7; 4)$	$A_3(5; 10; 4)$	$A_4(4; 7; 8)$
4	$A_1(4; 6; 5)$	$A_2(7; 10; 2)$	$A_3(2; 10; 10)$	$A_4(7; 5; 9)$
5	$A_1(4; 4; 10)$	$A_2(0; 7; 1)$	$A_3(2; 8; 4)$	$A_4(1; 5; 0)$
6	$A_1(4; 2; 5)$	$A_2(5; 4; 7)$	$A_3(0; 2; 7)$	$A_4(7; 3; 7)$
7	$A_1(6; 8; 2)$	$A_2(9; 4; 4)$	$A_3(2; 4; 7)$	$A_4(7; 9; 6)$
8	$A_1(7; 5; 3)$	$A_2(4; 6; 6)$	$A_3(4; 5; 7)$	$A_4(1; 2; 6)$
9	$A_1(6; 1; 1)$	$A_2(1; 1; 4)$	$A_3(4; 2; 0)$	$A_4(5; 8; 1)$
10	$A_1(5; 5; 4)$	$A_2(4; 3; 5)$	$A_3(3; 5; 1)$	$A_4(1; 1; 1)$

Задача 2.

Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку

$M(1; 0; -2)$ и прямую с уравнением $\frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{3}$.

Задача 3.

Привести к каноническому виду общие уравнения прямой

$$\begin{cases} 2x + 3y + z + 1 = 0 \\ x + 3y + 4z + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 3y + 4z + 2 = 0 \\ x + 3y + 4z + 2 = 0 \end{cases}$$

Задача 4. $x + 3y + 4z + 2 = 0$.

Найти расстояние между параллельными прямыми

$$l_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-4}{1} \quad \text{и} \quad l_2: \frac{x-2}{2} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-3}{1}$$

Задача 5.

Составить параметрическое уравнение прямой L , проходящей через точки $A(2,0,2)$ и $B(1,1,1)$

Задача 6.

- Определить, при каком значении a прямая $(a+2)x + (a^2-9)y + 3a^2 - 8a + 5 = 0$
- 1) параллельна оси абсцисс;
 - 2) параллельна оси ординат;
 - 3) проходит через начало координат.
- В каждом случае написать уравнение прямой.

Задача 7.

- Определить, при каких значениях m и n прямая



$$(m + 2n - 3)x + (2m - n + 1)y + 6m + 9 = 0$$

параллельна оси абсцисс и отсекает на оси ординат отрезок, равный -3 (считая от начала координат). Написать уравнение этой прямой.

Задача 8.



Определить, при каких значениях m и n прямая

$$(2m - n + 5)x + (m + 3n - 2)y + 2m + 7n + 19 = 0$$

параллельна оси ординат и отсекает на оси абсцисс отрезок, равный $+5$ (считая от начала координат). Написать уравнение этой прямой.

Задача 9.



Доказать, что в следующих случаях две данные прямые пересекаются, и найти точку их пересечения:

- 1) $x + 5y - 35 = 0$, $3x + 2y - 27 = 0$;
- 2) $14x - 9y - 24 = 0$, $7x - 2y - 17 = 0$;
- 3) $12x + 15y - 8 = 0$, $16x + 9y - 7 = 0$;
- 4) $8x - 33y - 19 = 0$, $12x + 55y - 19 = 0$;
- 5) $3x + 5 = 0$, $y - 2 = 0$.

Задача 10.



Доказать, что в следующих случаях две данные прямые параллельны:

- 1) $3x + 5y - 4 = 0$, $6x + 10y + 7 = 0$;
- 2) $2x - 4y + 3 = 0$, $x - 2y = 0$;
- 3) $2x - 1 = 0$, $x + 3 = 0$;
- 4) $y + 3 = 0$, $5y - 7 = 0$.

Задача 11.



Доказать, что в следующих случаях две данные прямые совпадают:

- 1) $3x + 5y - 4 = 0$, $6x + 10y - 8 = 0$;
- 2) $x - y - 2 = 0$, $x - 2y = 0$;
- 3) $x - 3 - 1 = 0$, $3x - 3 = 0$.

Задача 12.



Определить, при каких значениях a и b две прямые

$$ax - 2y - 1 = 0, \quad 6x - 4y - b = 0$$

1) имеют одну общую точку; 2) параллельны; 3) совпадают.

Задача 13.



Определить, при каких значениях m и n две прямые

$$mx + 8y + n = 0, \quad 2x + my - 1 = 0$$

1) параллельны; 2) совпадают; 3) перпендикулярны.

Задача 14.



Определить, при каком значении m две прямые

$$(m - 1)x + my - 5 = 0, \quad mx + (2m - 1)y + 7 = 0$$

пересекаются в точке, лежащей на оси абсцисс.

Задача 15.



Определить, при каком значении m две прямые

$$mx + (2m + 3 + m + 6) = 0, \quad (2m + 1)x + (m - 1)y + m - 2 = 0$$

пересекаются в точке, лежащей на оси ординат.

Задача 16.



Установить, пересекаются ли в одной точке три прямые в следующих случаях:

- 1) $2x + 3y - 1 = 0$, $4x - 5y + 5 = 0$, $3x - y + 2 = 0$;
- 2) $3x - y + 3 = 0$, $5x + 3y - 7 = 0$, $x - 2y - 4 = 0$;
- 3) $2x - y + 1 = 0$, $x + 2y - 17 = 0$, $x + 2y - 3 = 0$,

Задача 17.



Доказать, что если три прямые

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0, \quad A_1 x + B_2 y + C = 0, \quad A_3 x + B_3 y + C_3 = 0$$

☐ пересекаются в одной точке, то

$$\begin{array}{ccc} A & B & C_1 \\ A_1 & B_2 & C_2 \neq 0 \\ A_2 & B_3 & C_3 \\ & & 3 \end{array}$$

Задача 18.

☐ Доказать, что если $\begin{array}{ccc} A & B & C_1 \\ A_1 & B_2 & C_2 \neq 0 \\ A_2 & B_3 & C_3 \\ & & 3 \end{array}$ то три прямые

$A_1x + B_1y + C_1 = 0, A_2x + B_2y + C_2 = 0, A_3x + B_3y + C_3 = 0$ пересекаются в одной точке или параллельны.

Задача 19.

☐ Определить, при каком значении a три прямые $2x - y + 3 = 0$, $x + y + 3 = 0$, $ax + y - 13 = 0$ будут пересекаться в одной точке.

Задача 20.

☐ Даны прямые: 1) $2x + 3y - 6 = 0$; 2) $4x - 3y + 24 = 0$; 3) $2x + 3y - 9 = 0$; 4) $3x - 5y - 2 = 0$; 5) $5x + 2y - 1 = 0$. Составить для них уравнения «в отрезках» и построить эти прямые на чертеже.

Задача 21.

☐ Вычислить площадь треугольника, отсекаемого прямой $3x - 4y - 12 = 0$ от координатного угла.

Задача 22.

☐ Составить уравнение прямой, которая проходит через точку $M_1(3; -7)$ и отсекает на координатных осях отличные от нуля отрезки одинаковой величины (считая каждый отрезок направленным от начала координат).

Задача 23.

☐ Составить уравнение прямой, которая проходит через точку $P(2; 3)$ и отсекает на координатных осях отрезки равной длины, считая каждый отрезок от начала координат.

Задача 24.

☐ Составить уравнение прямой, которая проходит через точку $C(1; 1)$ и отсекает от координатного угла треугольник с площадью, равной 2 кв. ед.

Задача 25.

☐ Составить уравнение прямой, которая проходит через точку $B(5; -5)$ и отсекает от координатного угла треугольник с площадью, равной 50 кв. ед.

Задача 26.

☐ Составить уравнение прямой, которая проходит через точку $P(8; 6)$ и отсекает от координатного угла треугольник с площадью, равной 12 кв. ед.

Задача 27.

☐ Составить уравнение прямой, которая проходит через точку $P(12; 6)$ и отсекает от координатного угла треугольник с площадью, равной 150 кв. ед.

Задача 28.

☐ Через точку $M(4; 3)$ проведена прямая, отсекающая от координатного угла треугольник, площадь которого равна 3 кв. ед. Определить точки пересечения этой прямой с осями координат.

Задача 29.

☐ Через точку $M_1(x_1; y_1)$, где $x_1 y_1 > 0$, проведена прямая $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ отсекающая от координатного угла треугольник, площадь которого равна S . Определить, при каком соотношении между величинами $x_1 > y_1$ и S отрезки a и b будут иметь одинаковые знаки.

Задача 30.



Даны уравнения прямых:

1) $x - 2 = 0$; 2) $x + 2 = 0$; 3) $y - 3 = 0$; 4) $y + 3 = 0$;

5) $x - 3 + y - 6 = 0$; 6) $x - y + 2 = 0$; 7) $x + y - 3 + 2 = 0$;

8) $x \cos \alpha - y \sin \alpha - q = 0, q > 0; \alpha$ — острый угол;

9) $x \cos \alpha + y \sin \alpha + q = 0, q > 0; \alpha$ — острый угол.

Определить полярный угол нормали α и отрезок p для каждой из данных прямых; по полученным значениям параметров α и p построить эти прямые на чертеже (в последних двух случаях построение прямой выполнить, считая $\alpha = 30^\circ$ и $q = 2$).

Задача 31.

Задана прямая линия (а) и точка A . Требуется найти уравнение плоскости, проходящей через точку A и содержащей прямую (а).



№
варианта

Уравнение прямой (а)

$A(x;$

$y; z)$
Точка

1

$x - 2 = 0, y - 3 = 0, z - 1 = 0$

2

$x - 3 = 0, y - 1 = 0, z - 2 = 0$

$A(1, 1, 0)$
 $\alpha =$

3

$x - 4 = 0, y - 3 = 0, z - 2 = 0$

$A(3, 1, \alpha)$

4

$x - 7 = 0, y - 3 = 0, z - 5 = 0$

2α

5

$x - 1 = 0, y - 2 = 0, z - 1 = 0$

$A(1, 3, \alpha)$
 2α

6

$x - 4 = 0, y - 3 = 0, z - 1 = 0$

$A(4, \alpha)$
 $\alpha, 1, 3\alpha$

7

$x - 2 = 0, y - 3 = 0, z - 5 = 0$

$A(2, \alpha)$
 $\alpha, 1, 2\alpha$

8

$x - 3 = 0, y - 2 = 0, z - 2 = 0$

9

$x - 6 = 0, y - 1 = 0, z - 1 = 0$

$A(3, 2, 1\alpha)$
 $A(5, 1, \alpha)$

10

$x - 3 = 0, y - 3 = 0, z - 2 = 0$

α

$A(1, 2, \alpha)$

Методические указания по выполнению задания

Для выполнения предложенных заданий на практических занятиях необходимо изучить материал лекции по данной теме. Основные определения и теоремы. При этом

следует учитывать, что предложенный в лекции материал частично опирается на некоторые разделы из школьного курса математики, которые также желательно было бы повторить для хорошего и полного усвоения дисциплины.

Практическое занятие

Тема занятия «Кривые второго порядка»

Цель занятия: познакомить студентов с основными понятиями аналитической геометрии на плоскости. Рассмотреть различные виды уравнения кривых на плоскости на примере конкретных задач. Научиться строить кривые второго порядка по каноническому виду уравнения кривой. Находить основные характеристики: фокус, асимптота, эксцентриситет, директриса и т.п. Научить решать типовые задачи.

Задания

Построить кривые по заданным уравнениям.

№ варианта	Уравнения кривых
1	а) $x^2 - 4x + y^2 = 9$, б) $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1$, в) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$, г) $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + x + y = 0$, а) $2x^2 + y^2 = 1$ б) $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} = 1$, в) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$, г) $x^2 - 2x + y^2 = 0$.
2	а) $2x^2 + y^2 = 1$ б) $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} = 1$, в) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$, г) $x^2 - 2x + y^2 = 0$.
3	а) $x^2 - 3x + y^2 = 16$, б) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1$, в) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$, г) $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$.
4	а) $4x^2 + y^2 = 25$, б) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$, в) $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{1} = 1$, г) $y^2 - 2x - 2y = 0$.
5	а) $x^2 - 1 - 5y^2 = 8$, б) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{5} = 1$,

	✖ $b) \frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{9} = 1,$	✖ $r) y^2 - x^2 - 2x - 2y = 0$
6	✖ $a) x^2 - 3y^2 = 9,$	✖ $b) \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{5} = 1,$
7	✖ $b) \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1,$	✖ $r) x^2 - 4x + y^2 - 3y = 0.$
8	✖ $a) x^2 - y^2 - 2x - 4y = 0$	✖ $b) x^2 - 3y^2 = 16$
9	✖ $b) \frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{10} = 1,$	✖ $r) \frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1.$
10	✖ $a) x^2 - 4y^2 - y - 3 = 25$	✖ $b) \frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{4} = 1,$
	✖ $b) \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{1} = 1,$	✖ $r) x^2 - 6x - 2y - 7 = 0.$
	✖ $a) x^2 - 4y^2 - y - 3 = 25$	✖ $b) \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1,$
	✖ $b) \frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1,$	✖ $r) x^2 - y^2 - 2x - 2y = 0.$
	✖ $a) 5x^2 - y^2 - 6 = 49$	✖ $b) \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{20} = 1,$
	✖ $b) \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{5} = 1,$	✖ $r) x^2 - 2x + y^2 - 4y = 0$

Решить задачу.

№ варианта	Условие задачи
1	Найти уравнение геометрического места центров окружностей, касающихся оси абсцисс и проходящих через точку $A(0;3)$.
2	Найти уравнение геометрического места точек, каждая из которых



вдвое ближе к точке $A(1;0)$, чем к точке $B(-2;0)$

3 Найти уравнение геометрического места точек, для которых отношение расстояния до начала координат к расстоянию до прямой $3x - 6 = 0$ равно $0,6$.

4 Найти уравнение геометрического места точек, каждая из которых находится вдвое дальше от точки $A(2,0)$, чем от оси ординат.

5 Найти уравнение геометрического места точек, равноудаленных от точки $A(2;2)$ и оси абсцисс.

6 Фокусы гиперболы находятся в точках $F_1(-7;0)$ и $F_2(7;0)$. Гипербола проходит через точку $A(2,0)$. Найти уравнения ее асимптот и угол между ними.

7 На эллипсе $\frac{x^2}{441} + \frac{y^2}{216} = 1$ найти точки, в которых фокальные радиусы были бы взаимно перпендикулярны.

8 Найти параметр параболы $y^2 = 2px$ и уравнение ее директрисы, если известно, что эта парабола проходит через точки пересечения прямой $y = x$ с окружностью $x^2 + y^2 = 6x + 0$.

9 На гиперболе $9x^2 - 16y^2 = 144$ найти точки, расстояние которых от левого фокуса вдвое меньше, чем от правого.

10 Найти уравнение эллипса, у которого эксцентриситет равен $0,8$, а фокальные радиусы одной из его точек равны 2 и 3 , полагая, что большая ось эллипса совпадает с осью абсцисс, его центр – с началом координат.

Методические указания по выполнению заданий

Для выполнения предложенных заданий на практических занятиях необходимо изучить материал лекции по данной теме. Основные определения и теоремы. При этом следует учитывать, что предложенный в лекции материал частично опирается на некоторые разделы из школьного курса математики, которые также желательно было бы повторить для хорошего и полного усвоения дисциплины.

Практическое занятие

Тема занятия «Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление функции одной переменной»

Цель занятия: изучение основных математических понятий, их взаимосвязи и развития, а также отвечающих им методов расчёта, используемых для анализа, моделирования и решения прикладных задач.

Задания

Задача 1

(1.1 – 1.12) Сформулировать определение предела функции в точке $x \rightarrow a$

Исходя из определения доказать, что

$$1.1. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x^2 - x^2 - 5}{x - 1} = 4.$$

$$1.2. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 1} = 3.$$

$$1.3. \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 3x + 2} = 2.$$

$$1.4. \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 12}{x^2 - 2x} = 4$$

$$1.5. \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x} = 2.$$

$$1.6. \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 4x + 3} = 2.$$

$$1.7. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 4}{x^2 - x} = 5.$$

$$1.8. \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{5x^2 - x^2 - 6}{x - 2} = 1.$$

$$1.9. \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = 1$$

$$1.10. \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3} = 4.$$

$$1.11. \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} = 1.$$

$$1.12. \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - x - 20}{x - 4} = 9.$$

(1.13 – 1.20) Сформулировать определение предела функции при $x \rightarrow \infty$. Исходя из определения доказать, что

$$1.13. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 1}{x - 1} = 2.$$

$$1.14. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x - 2}{x - 1} = 4.$$

$$1.15. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x - 2} = 0.$$

$$1.16. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3}{x - 3} = 0.$$

$$1.17. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 1} = 1.$$

$$1.18. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3}{x^2 - 3} = 0.$$

$$1.19. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 3}{x - 7} = 1.$$

$$1.20. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x - 7}{2x - 5} = 3.$$

(1.21 –1.30) Сформулировать определение предела функции при $x \rightarrow x_0$. Исходя из определения предела доказать, что

$$1.21. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + 2x}{x + 1} = 2.$$

$$1.22. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 + 3x}{x + 2} = 3.$$

$$1.23. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{4 + x}{x + 3} = 1.$$

$$1.24. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3 + 2x}{3 + x} = 2.$$

$$1.25. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{5 + 2x}{3 + x} = 2.$$

$$1.26. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x + 2}{1 + x} = 5.$$

$$1.27. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{6x + 7}{3} = 2.$$

$$1.28. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{5 + 4x}{3 + 2x} = \frac{17}{9}.$$

$$1.29. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x + 12}{7 + 4x} = 2.$$

$$1.30. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{10x + 3}{5x + 9} = \frac{31}{23}.$$

Задача 2

Найти предел функции при разных значениях x_0 .

$$2.1. \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2}{x^2 + 6x + 1} \quad \begin{array}{l} \text{а) } x_0 = 1; \quad \text{б) } x_0 = -1; \quad \text{в) } x_0 = \dots \end{array}$$

$$2.2. \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{5x^2 + 8x + 4}{4 + x^2}, \quad \begin{array}{l} \text{а) } x_0 = 1; \quad \text{б) } x_0 = -2; \quad \text{в) } x_0 = \dots \end{array}$$

$$2.3. \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 + 3x + 4}{x^2 + 16}, \quad \begin{array}{l} \text{а) } x_0 = 2; \quad \text{б) } x_0 = 4; \quad \text{в) } x_0 = \dots \end{array}$$

$$2.4. \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 + 3x + 10}{x^2 + 25}, \quad \begin{array}{l} \text{а) } x_0 = -1; \quad \text{б) } x_0 = 5; \quad \text{в) } x_0 = \dots \end{array}$$

$$2.5. \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 + 1}{x^2 + 5x + 4}, \quad \begin{array}{l} \text{а) } x_0 = 2; \quad \text{б) } x_0 = -1; \quad \text{в) } x_0 = \dots \end{array}$$

$$2.6. \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 + 4}{x^2 + 5x + 6}, \quad \begin{array}{l} \text{а) } x_0 = 1; \quad \text{б) } x_0 = -2; \quad \text{в) } x_0 = \dots \end{array}$$

$$2.7. \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 + 3x + 4}{x^2 + 16}, \quad \begin{array}{l} \text{а) } x_0 = 2; \quad \text{б) } x_0 = -4; \quad \text{в) } x_0 = \dots \end{array}$$

$$2.8. \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 3x}, \quad \begin{array}{l} \text{а) } x_0 = 2; \quad \text{б) } x_0 = -3; \quad \text{в) } x_0 = \dots \end{array}$$

- 2.9. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - x}{x^2 - 3x - 2}$, a) $x_0 = 1$; б) $x_0 = -1$; в) $x_0 = \square$.
- 2.10. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2x^2 - x - 15}{x^2 - \square}$, a) $x_0 = 1$; б) $x_0 = 3$; в) $x_0 = \square$.
- 2.11. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{3x^2 - x - 3}{3x^2 - 2x - 1}$, a) $x_0 = 2$; б) $x_0 = 1$; в) $x_0 = \square$.
- 2.12. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{3x^2 - x - 2}{x^2 - 1}$, a) $x_0 = 2$; б) $x_0 = -1$; в) $x_0 = \square$.
- 2.13. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2}{x^2 - 4x - 4}$, a) $x_0 = 1$; б) $x_0 = 2$; в) $x_0 = \square$.
- 2.14. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{3x^2 - 4x - 5}{x^2 - 4x - 5}$, a) $x_0 = 1$; б) $x_0 = -5$; в) $x_0 = \square$.
- 2.15. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2x^2 - 13x - 7}{x^2 - 8x - 7}$, a) $x_0 = -1$; б) $x_0 = 7$; в) $x_0 = \square$.
- 2.16. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2x^2 - 12x - 18}{x^2 - 2x - 3}$, a) $x_0 = -1$; б) $x_0 = 3$; в) $x_0 = \square$.
- 2.17. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - 5x - 6}{x^2 - 7x - 6}$, a) $x_0 = 2$; б) $x_0 = 6$; в) $x_0 = \square$.
- 2.18. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - 9x - 8}{x^2 - 64}$, a) $x_0 = -1$; б) $x_0 = 8$; в) $x_0 = \square$.
- 2.19. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - 18x - 81}{x^2 - 8x - 9}$, a) $x_0 = 1$; б) $x_0 = 9$; в) $x_0 = \square$.
- 2.20. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - 11x - 10}{x^2 - 9x - 10}$, a) $x_0 = 2$; б) $x_0 = 10$; в) $x_0 = \square$.
- 2.21. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{7x^2 - 13x - 2}{x^2 - x - 6}$, a) $x_0 = 1$; б) $x_0 = 2$; в) $x_0 = \square$.
- 2.22. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{3x^2 - 4x - 4}{6x^2 - 11x - 2}$, a) $x_0 = -1$; б) $x_0 = -2$; в) $x_0 = \square$.

B) X_0 ☐ ☐ .

B) X_0 ☐ ☐.

B) X_0 ☐ ☐.

B) X_0 ☐ ☐.

B) X_0 ☐ ☐.

B) X_0 ☐ ☐.

B) X_0 ☐ ☐.

B) X_0 ☐ ☐.

Найти указанные пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя.

B) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 1}{x^2 + 2x + 1}$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow 1} x^2 \operatorname{tg} \frac{1}{x^3 - 1}.$$

B) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2}{x^2}$

e) $\lim_{x \rightarrow 1} x \operatorname{tg} \frac{5x}{x-1}$.

B) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 11x + 6}{x^2 - 9}$

$$\Gamma) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin^2 3x}{3x^2},$$

$$\Delta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{2^{2x}}}{x^2 - 1},$$

$$\epsilon) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 - 1 \sin \frac{3}{x - 5}.$$

$$3.4. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - x},$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{x - 2} - \frac{4x^2}{x^3 - 8},$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^4 - 5}{x^2 - 3x},$$

$$\Gamma) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\operatorname{tg}^2 5x},$$

$$\Delta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 1}{2x - 1} x,$$

$$\epsilon) \lim_{x \rightarrow 0} x^3 - 1 \sin \frac{x}{x^2}.$$

$$3.5. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{3x - 1},$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x - 2} - 1 \frac{1}{x - 2},$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^4 - 5}{x^2 - 3x},$$

$$\Gamma) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{\operatorname{tg}^2 4x},$$

$$\Delta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 1}{2x} x,$$

$$\epsilon) \lim_{x \rightarrow 0} x - \frac{5x}{x^3 - 2x - 1}.$$

$$3.6. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 3x}{x^2},$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{x - 1} - \frac{x^2 - 1}{x},$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^7 - 1}{x^2 - 4},$$

$$\Gamma) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{x^2},$$

$$\Delta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5}{x^2 - 1},$$

$$\epsilon) \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{tg} \frac{5}{x^2 - 3}.$$

$$3.7. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - 1}{x - x^2}, \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{x - 2} - \frac{x}{2},$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - 1}{x^3 - 3},$$

$$\Gamma) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \operatorname{ctg} 2x}{\sin 3x},$$

$$\Delta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{1^{3x}}}{x^2 - 1},$$

$$\epsilon) \lim_{x \rightarrow 0} x^3 \sin \frac{2x}{x^4 - 2}.$$

$$3.8. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{x^2 - x^3},$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3}{x - 1} - x^2,$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9x^2 - 1}{x - 1},$$

$$\Gamma) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{1 - \cos 2x},$$

$$\Delta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{3^{3x}}}{x^2 - 1},$$

$$\epsilon) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{x}{4x^4 - 1}.$$

$$3.9. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x - 1}{x - 3},$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2}{x - 1} - \frac{x^3}{x^2 - 1},$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 5}{x^2 - 1},$$

$$\Gamma) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{x^2},$$

$$\Delta) \lim_{x \rightarrow 1} 7 - 6x \frac{x}{3x^2 - 3},$$

$$\epsilon) \lim_{x \rightarrow 0} x - 1 \operatorname{tg} \frac{x - 1}{x}.$$

$$3.10.a) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1 \cdot 3x \cdot 2x \cdot 6}{x^2 \cdot 5x},$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2}{x \cdot 3} \cdot \frac{1}{x^2 \cdot 9},$$

$$в) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3}{x^2 \cdot 1},$$

$$г) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 \cdot \cos 4x}{2x \cdot \operatorname{tg} 2x},$$

$$д) \lim_{x \rightarrow 0} 1 \cdot \operatorname{tg}^2 x \cdot \frac{1}{2 \operatorname{ctg}^2 x},$$

$$е) \lim_{x \rightarrow 1} x \cdot 1 \cdot \operatorname{tg} \frac{3}{x^2 \cdot 4}.$$

$$3.11.a) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 \cdot x \cdot 12}{x \cdot 2 \cdot 4 \cdot x},$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2}{x \cdot 2} \cdot \frac{x^3 \cdot 1}{x^2 \cdot 2x},$$

$$в) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4 \cdot x^2 \cdot 2}{x \cdot 5 \cdot x^2 \cdot 1},$$

$$г) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{4}}{\arcsin^2 \frac{x}{2}},$$

$$д) \lim_{x \rightarrow 1} 3 \cdot \frac{x}{1-x},$$

$$е) \lim_{x \rightarrow 1} x^2 \sin \frac{x-1}{x^2}.$$

$$3.12.a) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x \cdot 12 \cdot 4 \cdot x}{x^2 \cdot 2x \cdot 8},$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \cdot 1}{2x \cdot 2} \cdot \frac{x^3}{x^2 \cdot 1},$$

$$в) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \cdot 1 \cdot 2}{x \cdot 3 \cdot 1},$$

$$г) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 \cdot \cos 3x}{\sin^2 3x},$$

$$д) \lim_{x \rightarrow 1} 3x \cdot \frac{2}{x-3},$$

$$е) \lim_{x \rightarrow 1} x^4 \sin \frac{5}{x^2}.$$

$$3.13.a) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x \cdot 10 \cdot 4 \cdot x}{2},$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{5x^2}{3x \cdot 12} \cdot \frac{x^3}{x^2 \cdot 16},$$

$$в) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4 \cdot x^3 \cdot 3}{x \cdot 1 \cdot 1},$$

$$г) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x \cdot \cos 5x}{x^2},$$

$$д) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \cdot 2 \cdot 5x}{x \cdot x},$$

$$е) \lim_{x \rightarrow 1} x^6 \operatorname{tg} \frac{4x-1}{x \cdot 2x^7}.$$

$$3.14.a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 \cdot x \cdot x \cdot 6}{x^2 \cdot x \cdot 6},$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{x \cdot 1} \cdot \frac{2 \cdot x^3}{x^2 \cdot x \cdot 1},$$

$$в) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4 \cdot x^3}{x \cdot 1 \cdot 1},$$

$$г) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{arctg} 2x}{1 \cdot \cos 4x},$$

$$д) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x}{x \cdot 2},$$

$$е) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \cdot 1}{x \cdot 1} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{5}}.$$

$$3.15.a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3 \cdot 2x \cdot x \cdot 4}{3x^2 \cdot 4x \cdot 1},$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x \cdot 1} \cdot \frac{1}{x^2 \cdot 3x},$$

$$в) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5 \cdot x^3}{x \cdot 3 \cdot 2},$$

$$г) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 \cdot \cos 8x}{x \cdot e^{2x} \cdot 1},$$

$$д) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \cdot 1^{6x}}{x \cdot 1},$$

$$е) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 \cdot 1}{x \cdot 1} \cdot \frac{3}{\operatorname{tg} \frac{x}{4}}.$$

$$3.16.a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 \cdot 3x \cdot 2}{x \cdot x \cdot 1},$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \cdot 2}{x \cdot 1} \cdot \frac{x^2 \cdot 3}{x \cdot 1},$$

$$в) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \cdot 1}{x \cdot 3},$$

$$г) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot e^x \cdot 1}{1 \cdot \cos x},$$

$$д) \lim_{x \rightarrow 1} 2 \cdot \frac{2x}{1-x},$$

$$е) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x \cdot 1}{7 \cdot \operatorname{tg} \frac{5}{4x}}.$$

$$3.17.a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 4x - 1}{x^3 - 3x^2 + 5x - 3},$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 - 13}{x^3 - 1} \cdot \frac{x^3}{x^2}, \quad в) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x^5 - 3}{3x^4 - 1},$$

$$г) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln \frac{1}{x}}{3x \arcsin \frac{x}{2}},$$

$$д) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^{5x}}{1 - 2x},$$

$$е) \lim_{x \rightarrow 0} x^4 \operatorname{tg} \frac{3x}{x^5 - 1}.$$

3.18.a)

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2 - 9x + 4}{x^3 - 5x^2 + 3x},$$

б)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2 - 7}{1 - x} \cdot \frac{3x^3}{x^2},$$

$$в) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^4 - 1}{5x^3 - 1} \cdot \frac{1}{4},$$

$$г) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{x \sin 5x},$$

$$д) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 1}{x^2 - 1} \cdot \frac{2x}{x},$$

$$е) \lim_{x \rightarrow 0} x^3 \sin \frac{4x^2}{3x^7 - 5}.$$

3.19.a)

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x - 1}{2x^2 - 7x + 15} \cdot \frac{x - 6}{x},$$

б)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{15x^2 - 3}{3x} \cdot \frac{5x^3}{x^2 - 1},$$

$$в) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 2}{6x^4 - 5x} \cdot \frac{1}{1},$$

$$г) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{tg} x}{\sin 3x - \ln(1 - x)},$$

$$д) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - 4}{3x} \cdot \frac{2x}{x},$$

$$е) \lim_{x \rightarrow 0} x^5 - 1 \operatorname{tg} \frac{x - 1}{x^2 - 4x}.$$

3.20.a)

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x - 17}{x^2 - 8x + 15} \cdot \frac{2x - 12}{x},$$

б)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2 - 7}{1 - x} \cdot \frac{3x^3}{x^2},$$

$$в) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 1}{4x - x} \cdot \frac{1}{3x},$$

$$г) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \operatorname{ctg}^2 5x,$$

$$д) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 5}{x^3 - 5} \cdot \frac{3x - 5}{x},$$

$$е) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \operatorname{tg} \frac{x}{x^4 - 3}.$$

$$3.21.a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^2 - x - 2},$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x - 1} \cdot \frac{5x^2}{x^3 - 3},$$

$$в) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^3 - 1}{6x^4 - 7x} \cdot \frac{1}{x},$$

$$г) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 4x}{x^2},$$

$$д) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 2x^3}{2x^3 - 1},$$

$$е) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \operatorname{tg} \frac{x}{x^4 - 3}.$$

$$3.22.a) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 1}{2x - 1} \cdot \frac{1}{3},$$

б)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x - 1}{x - 1} \cdot \frac{x^3}{x^2 - 5},$$

$$в) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 1}{4x^4 - 5} \cdot \frac{7}{x},$$

$$г) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x e^{8x}},$$

$$д) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 2x^2}{x - 3} \cdot \frac{2x}{x},$$

$$е) \lim_{x \rightarrow 0} x^7 \operatorname{tg} \frac{3x^2}{5 - x^4}.$$

$$3.23.a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x - 4}{x^2 - 12x + 20} \cdot \frac{10}{x},$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^3}{2x^2 - 1} \cdot \frac{x^2}{x - 5},$$

$$в) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5 - 1}{x^3 - 1} \cdot \frac{1}{x^3},$$

$$г) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{1}{x} - 3x^2}{\arcsin^2 2x},$$

$$д) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 5x^2}{2x^2 - 1} \cdot \frac{1}{x},$$

$$е) \lim_{x \rightarrow 0} x^4 \operatorname{tg} \frac{4x}{x}.$$

$$3.24.a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{1 - 3x} \cdot \frac{2}{x},$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x^3}{3x^2 - 5} \cdot \frac{2x^2}{x - 4},$$

$$в) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1} \cdot \frac{1}{x^3},$$

$$\begin{array}{lll}
 \text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{\frac{2x^2}{1}}, & \text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2}{x^2 - 1}, & \text{е) } \lim_{x \rightarrow 0} x^7 \operatorname{tg} \frac{x}{x^4 - 5}. \\
 3.25. \text{а) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 5x + 2}{4x - 7}, & \text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{12x^3 - 4x^2}{3x^2 - 1} \cdot \frac{4x^2}{x - 4}, & \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - 5}{x - 1}, \\
 \text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 2x}{\cos 3x - \cos 5x}, & \text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 4}{x}, & \text{е) } \lim_{x \rightarrow 0} x^7 \operatorname{tg} \frac{x}{x^4}. \\
 3.26. \text{а) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 1}{4x^2 - x - 5}, & \text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^3 - 2x^3}{2x^2 - 1} \cdot \frac{2x^3}{x^2 - 1}, & \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 1}{4x - 2 - 5}, \\
 \text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{x - \cos 2x}, & \text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2}, & \text{е) } \lim_{x \rightarrow 0} x^4 - 1 \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{x^2} - 1. \\
 3.27. \text{а) } \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x - 8}{x - 8}, & \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2 - 3x^2}{x - 1} \cdot \frac{3x^2}{x - 2}, & \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 1}{x^3}, \\
 \text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - x}{\operatorname{tg} x^2}, & \text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 4}{x}, & \text{е) } \lim_{x \rightarrow 0} x^4 \operatorname{tg} \frac{3x}{4x^5 - 3}. \\
 3.28. \text{а) } \lim_{x \rightarrow 10} \frac{x - 1}{x - 10}, & \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x^2 - 3x^2}{2x - 1} \cdot \frac{3x^2}{x - 4}, & \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 3}{x^2 - 3}, \\
 \text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 x - 4x}{\sin^2 x - 1}, & \text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 8}{x}, & \text{е) } \lim_{x \rightarrow 0} x^4 \sin \frac{6x}{3x^5 - 2}. \\
 3.29. \text{а) } \lim_{x \rightarrow 12} \frac{x - 3}{x - 12}, & \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 - 5x^3}{x^2} \cdot \frac{3x^2}{x - 2}, & \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x - 1}{x - 1}, \\
 \text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - x}{\arcsin x^2}, & \text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 8}{x - 7}, & \text{е) } \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{tg} \frac{x}{x^3} - 2. \\
 3.30. \text{а) } \lim_{x \rightarrow 11} \frac{x - 5}{11 - x}, & \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3 - x^2}{2x^2} \cdot \frac{x^2}{x - 2}, & \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 1}{x^2 - 2}, \\
 \text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{\sin x^4}, & \text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 3}{2x - 7}, & \text{е) } \lim_{x \rightarrow 0} x^4 \sin \frac{x}{x^2} - 2.
 \end{array}$$

Задача 4

Функция $y=f(x)$ задана различными аналитическими выражениями для различных областей изменения независимой переменной. Найти точки разрыва функции, если они существуют, указать их характер. Сделать чертеж.

$$4.1. y = \begin{cases} x^3 - 1, & x \leq 0, \\ x^2, & 0 \leq x \leq 2, \\ x - 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

$$4.3. y = \begin{cases} x - 3, & x \leq 0, \\ 3 - x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 4, & x \geq 1. \end{cases}$$

$$4.5. y = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \leq 0, \\ 0, & 0 \leq x \leq 1, \\ x, & x \geq 1. \end{cases}$$

$$4.7. y = \begin{cases} x^2, & x \leq -1, \\ 1, & -1 \leq x \leq 2, \\ \frac{1}{3 - x}, & x \geq 2. \end{cases}$$

$$4.9. y = \begin{cases} 3 - x, & x \leq -1, \\ 2x - 3, & -1 \leq x \leq 0, \\ \cos x, & x \geq 0. \end{cases}$$

$$4.11. y = \begin{cases} x^2, & x \leq 1, \\ \cos x, & 1 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ x - \frac{\pi}{2}, & x \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$$4.13. y = \begin{cases} 0, & x \leq -1, \\ \frac{1}{x}, & -1 \leq x \leq 2, \\ \frac{1}{2}, & x \geq 2. \end{cases}$$

$$4.2. y = \begin{cases} x^2 - 1, & x \leq -1, \\ \frac{2}{x}, & -1 \leq x \leq 2, \\ x - 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

$$4.4. y = \begin{cases} x, & x \leq 1, \\ \frac{1}{x - 2}, & 1 \leq x \leq 3, \\ x - 2, & x \geq 3. \end{cases}$$

$$4.6. y = \begin{cases} 2 - x, & x \leq 0, \\ \sin x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ 0, & x \geq \pi. \end{cases}$$

$$4.8. y = \begin{cases} e^x, & x \leq 1, \\ x - 1, & 1 \leq x \leq 2, \\ \frac{1}{x}, & x \geq 2. \end{cases}$$

$$4.10. y = \begin{cases} 3^x, & x \leq 0, \\ \frac{1}{x}, & 0 \leq x \leq 1, \\ x, & x \geq 1. \end{cases}$$

$$4.12. y = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1 - x, & 0 \leq x \leq 1, \\ \ln x, & x \geq 1. \end{cases}$$

$$4.14. y = \begin{cases} x, & x \leq 0, \\ \operatorname{tg} x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}, \\ 2, & x \geq \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

$$4.15. y = \cos x, \quad x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right],$$

$$4.17. y = \frac{1}{2}x^2, \quad 0 \leq x \leq 4,$$

$$4.19. y = x^2, \quad x \in [0, 2],$$

$$4.21. y = x^3, \quad x \in [0, 4],$$

$$4.23. y = \frac{1}{x^2}, \quad x \in [1, 8],$$

$$4.25. y = \frac{1}{2}x, \quad x \in [0, 2],$$

$$4.27. y = x^2, \quad x \in [0, 2],$$

$$4.16. y = \frac{1}{x}, \quad x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right],$$

$$4.18. y = x^2, \quad x \in [0, 1],$$

$$4.20. y = \frac{1}{x^2}, \quad x \in [1, 2],$$

$$4.22. y = \frac{1}{x}, \quad x \in [1, 3],$$

$$4.24. y = \frac{1}{x}, \quad x \in [1, 8],$$

$$4.26. y = 2^x, \quad x \in [0, 2],$$

$$4.28. y = \frac{1}{x^2}, \quad x \in [2, 4],$$

$$4.29. y = \begin{cases} x^3 - 3, & x \leq 0, \\ 2 - x, & 0 < x \leq 2, \\ \frac{1}{x-2}, & x > 2. \end{cases}$$

$$4.30. y = \begin{cases} x^2 - 4, & x \leq 0, \\ \frac{1}{x}, & 0 < x \leq \frac{1}{2}, \\ 2, & x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Задача 5

Задана функция $y = f(x)$ и два значения аргумента x . Требуется: 1) найти пределы функции при приближении к каждому из заданных значений x слева и справа; 2) установить, является ли данная функция непрерывной или разрывной для каждого из заданных значений x ; 3) сделать схематический чертёж.

$$5.1. y = 7^{\frac{1}{10-x}}; x_1 = 10; x_2 = 9.$$

$$5.2. y = 7^{\frac{1}{x-7}}; x_1 = -7; x_2 = -8.$$

$$5.3. y = 25^{\frac{1}{x-11}}; x_1 = 11; x_2 = 9.$$

$$5.4. y = 12^{\frac{1}{11-x}}; x_1 = -11; x_2 = -10.$$

$$5.5. y = 7^{\frac{1}{12-x}}; x_1 = -12; x_2 = -10.$$

$$5.6. y = 3^{\frac{1}{x+12}}; x_1 = 12; x_2 = 13.$$

$$5.7. y = 4^{\frac{1}{13-x}}; x_1 = 13; x_2 = 11.$$

$$5.8. y = 4^{\frac{1}{13+x}}; x_1 = -13; x_2 = -11.$$

$$5.9. y = 2^{\frac{1}{14-x}}; x_1 = 14; x_2 = 13.$$

$$5.10. y = 25^{\frac{1}{x+14}}; x_1 = -14; x_2 = -13.$$

$$5.11. y = 2^{\frac{1}{x-5}}; x_1 = 3; x_2 = 5.$$

$$5.12. y = 4^{\frac{1}{3-x}}; x_1 = 1; x_2 = 3.$$

$$5.13. y = 3^{\frac{1}{x-2}}; x_1 = 2; x_2 = 4.$$

$$5.14. y = 5^{\frac{1}{1-x}}; x_1 = 1; x_2 = 1.$$

$$5.15. y = 4^{\frac{1}{x-3}}; x_1 = 1; x_2 = 3.$$

$$5.16. y = 2^{\frac{1}{3-x}}; x_1 = -3; x_2 = 0.$$

$$5.17. y = 9^{\frac{1}{x-2}}; x_1 = -2; x_2 = 0.$$

$$5.18. y = 3^{\frac{1}{x+1}}; x_1 = -1; x_2 = 1.$$

$$5.19. y = 5^{\frac{2}{x+5}}; x_1 = -5; x_2 = 1.$$

$$5.20. y = 9^{\frac{1}{x-3}}; x_1 = -5; x_2 = -3.$$

$$5.21. y = 6^{\frac{1}{x-6}}; x_1 = 6; x_2 = 5.$$

$$5.22. y = 6^{\frac{1}{x-6}}; x_1 = -6; x_2 = -4.$$

$$5.23. y = 16^{\frac{1}{x-7}}; x_1 = 9; x_2 = 7.$$

$$5.24. y = 16^{\frac{1}{8-x}}; x_1 = 8; x_2 = 6.$$

$$5.25. y \square \frac{1}{7^{\frac{1}{x}}}; x_1 \square 7; x_2 \square 6.$$

$$5.26. y \square \frac{1}{8^{\frac{1}{x}}}; x_1 \square -8; x_2 \square -7.$$

$$5.27. y \square \frac{1}{9^{\frac{1}{x}}}; x_1 \square 4; x_2 \square 2.$$

$$5.28. y \square \frac{1}{4^{\frac{1}{x}}}; x_1 \square -4; x_2 \square -2.$$

$$5.29. y \square \frac{1}{4^{\frac{1}{x}}}; x_1 \square 9; x_2 \square 7.$$

$$5.30. y \square \frac{1}{1^{\frac{1}{x}}}; x_1 \square -9; x_2 \square -8.$$

Задача 6

Вычислить пределы функции

$$6.1. \lim_{x \square 3} \frac{x^2 \square 1}{2x^3 \square x^2 \square 3}.$$

$$6.3. \lim_{x \square 2} \frac{x \square 2}{x^3 \square 2x \square 12}.$$

$$6.5. \lim_{x \square 4} \frac{6 \square x}{x^3 \square 64}.$$

$$6.7. \lim_{x \square 3} \frac{2x \square 3 \square 3}{3 \square x}.$$

$$6.9. \lim_{x \square 2} \frac{4x \square 1 \square 3}{x \square 2 \square 2}.$$

$$6.11. \lim_{x \square 0} \frac{3x^3 \square 4x^2 \square 8}{5x^3 \square 2x^2 \square x}.$$

$$6.13. \lim_{x \square 0} \frac{x^2 \square 2x \square 5}{x^3 \square 3x \square 7}.$$

$$6.15. \lim_{x \square 0} \frac{x^2}{x \square 3}.$$

$$6.17. \lim_{x \square 0} \frac{4x \square 1}{x \square 1}.$$

$$6.19. \lim_{x \square 0} \frac{\operatorname{tg} 6x}{\sin 13x}.$$

$$6.21. \lim_{x \square 0} \frac{\arcsin 5x}{\operatorname{tg} 2x}.$$

$$6.23. \lim_{x \square 0} \frac{\ln^2(1 \square 2x)}{\sin^2 6x \square \arcsin^3 x}.$$

$$6.25. \lim_{x \square 0} \frac{\ln(1 \square 3x)}{\sin 6x}.$$

$$6.27. \lim_{x \square 0} \frac{1 \square \cos x}{\cos x/2}.$$

$$6.2. \lim_{x \square 4} \frac{x^2 \square x \square 12}{x^2 \square 5x \square 4}.$$

$$6.4. \lim_{x \square 3} \frac{3x^2 \square 11x \square 6}{2x^2 \square 5x \square 3}.$$

$$6.6. \lim_{x \square 1/3} \frac{3x^2 \square 7x^3 \square 1}{2x^2 \square 1}.$$

$$6.8. \lim_{x \square 0} \frac{2 \square 6x \square x^2}{x \square 1}.$$

$$6.10. \lim_{x \square 4} \frac{x^7 \square 3x^3 \square 4}{16 \square x^2}.$$

$$6.12. \lim_{x \square 0} \frac{2x^3 \square 7x \square 1}{3x^2 \square 5x \square 6}.$$

$$6.14. \lim_{x \square 0} \frac{x^3 \square 1 \square 9 \square 6 \square x}{x^3 \square 3 \square 2 \square 1}.$$

$$6.16. \lim_{x \square 0} \frac{x \square 5 \square x}{x \square 1}.$$

$$6.18. \lim_{x \square 0} \frac{x \square x^2 \square 7x}{x \square 1}.$$

$$6.20. \lim_{x \square 0} \frac{\sin(1 \square x)}{x}.$$

$$6.22. \lim_{x \square 0} \frac{\sin^2 3x}{1 \square \cos 5x}.$$

$$6.24. \lim_{x \square 0} \sin 2x \square \operatorname{ctg} 3x.$$

$$6.26. \lim_{x \square 0} \frac{1 \square \cos x}{\sin^2 x}.$$

$$6.28. \lim_{x \square 3} \frac{(e^x \square 1) \square \cos x}{\operatorname{arctg}(x^2 \square 1)}.$$

$$6.29. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - x^2}{\sin 4x}.$$

$$6.31. \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} 3x.$$

$$6.33. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^5 - 3x^4}{2x^5 - 3x^4}.$$

$$6.35. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x^3 - 7x^2}{x^3 - x^2}.$$

$$6.37. \lim_{x \rightarrow 0} (1 - x^2)^{1/\sin x}.$$

$$6.30. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{1 - x^2}.$$

$$6.32. \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \operatorname{ctg} x$$

$$6.34. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x^3 - 3x^2}{9x^3 - 3x^2}.$$

$$6.36. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3 - 1}{3x^3 - 1}.$$

$$6.38. \lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x^2}.$$

Методические указания по выполнению заданий

Для выполнения предложенных заданий на практических занятиях необходимо изучить материал лекции по данной теме. Основные определения и теоремы. При этом следует учитывать, что предложенный в лекции материал частично опирается на некоторые разделы из школьного курса математики, которые также желательно было бы повторить для хорошего и полного усвоения дисциплины.

Практическое занятие

Тема занятия «Функции нескольких переменных»

Цель занятия: осмыслить математический аппарат с практических позиций для решения конкретных экономических задач, научить находить область определения функции нескольких переменных и изображать на плоскости область определения функции двух переменных.

Задания

Вариант 1

Задача 1. Написать уравнение касательной и нормали в точках с абсциссами a , b и c к кривым:

$$1. y = 3x^3 - 4x; \quad a = 1, \quad b = 1, \quad c = 2;$$

$$2. y = \operatorname{ctg} 2x; \quad a = 8, \quad b = 12, \quad c =$$

Задача 2. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на данном отрезке:

$$1. y = \frac{x^2}{5} - \frac{x}{4}, \quad x \in [0, 4]$$

$$2. y = 2x^2 - 0,7; \quad x \in [0, 3]$$

Задача 3. Найти экстремумы и интервалы монотонности функций:

$$1. y = 6x^3 - 9x^2;$$

$$4. y = \frac{9x}{2,5 - 1,5x^2};$$

$$2. y = x^5 (x - 3);$$

$$5. y = x^2$$

$$3. y = 4x^2 - 12x + x^3;$$

$$6. y = x e^{x^2}$$

Задача 4. Найти асимптоты следующих кривых:

$$1. y = \frac{10x}{x^2 - 2,3};$$

$$2. y = \frac{1}{x^3 - 125};$$

$$3. y = \frac{x^2 - 7}{x^2 - 64};$$

$$4. y = e^{5x^2}.$$

Задача 5. Найти точки перегиба и интервалы выпуклости функций:

$$1. y = 0,5x^4 - 6x^2;$$

$$2. y = 9 - x^4 - 3x^2;$$

$$3. y = \frac{4,5}{2 - x^2};$$

$$4. y = x^2 e^{-x}.$$

Задача 6. Построить графики функций:

$$1. y = \frac{x}{2} (x^2 - 2)^3;$$

$$2. y = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2}.$$

Задача 7. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ следующих функций:

$$1. z = x^5 - 4y^7 - x^3 y^3 - x^3 y^4;$$

$$2. z = \ln(xy - 5x^3 y) - \operatorname{tg} \frac{3x}{7y};$$

$$3. z = \frac{8xy}{(5x - 9y)^2} - \arcsin \sqrt{xy} - 3x^5 y.$$

Задача 8. Найти в точке A градиент функции $z(x, y)$ и производную в направлении вектора $\vec{l}$, если:

$$1. z = y^2(2x - 3); A(1; 1); \vec{l} = 2\vec{i} - \vec{j}$$

$$2. z = x^2 y - \frac{x}{y}; A(1; 2); \vec{l} = \vec{i} - \vec{j}.$$

;
Задача 9. Найти экстремумы функции двух переменных: $z = 4x^3 - xy^2 - 6x^2 - y^2$

Вариант 2

Задача 1. Написать уравнение касательной и нормали в точках с абсциссами a , b и c к кривым:

$$1. y = x^6 - 4x^3; a = 1, b = 2, c = 3.$$

$$y = \sin 5x; a = 1, b = 2, c = 3.$$

Задача 2. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на данном отрезке:

$$1. y = 2x^3 - 6x^2;$$

$$2. y = \frac{x}{9} - \frac{9}{x}, [2, 4]$$

Задача 3. Найти экстремумы и интервалы монотонности функций:

$$1. y = \frac{x^4}{12} - 9x^3;$$

$$4. y = \frac{1}{4 - x^2};$$

$$2. y = 3x(x - 2)^3;$$

$$5. y = 2x x e^{-4x}.$$

$$3. y = \frac{1}{4x^2} - \frac{1}{7x^4};$$

Задача 4. Найти асимптоты следующих кривых:

$$1. y = \frac{x}{x - 1};$$

$$3. y = \frac{x^3}{x^2 - 5};$$

$$4. y = x e^{12x}.$$

$$2. y = \frac{2x^2}{x-3};$$

Задача 5. Найти точки перегиба и интервалы выпуклости функций:

$$1. y = x^5 - 7x^2;$$

$$3. y = \frac{4}{x} - \frac{1}{x^3};$$

$$2. y = \frac{1}{11}x^4 - 4x^2 - \frac{3}{5};$$

4.

Задача 6. Построить графики функций:

$$v = 2xe^{2x}.$$

$$1. y = 1,5x^3 - 6x^2 - 7x - 3;$$

$$2. y = 4x^2e^{3x}.$$

Задача 7. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ следующих функций:

$$1. z = x^3 + y^2 - 6xy - x^4 - y^4 - x - 1;$$

$$3. z = e^{2x+6y} - \cos(4x - 7y).$$

$$z = \lg(4x - 2y) - \frac{1}{3}x - 9y - 4xy;$$

Задача 8. Найти в точке A градиент функции $z(x, y)$ и производную в направлении вектора $\vec{l}$, если:

1.

$$z = x^2 \ln^3 y; A(1; e); \vec{l} = 2\vec{i} - \vec{j};$$

2.

$$z = 2x^2 - 3y^2 - 4; A(1; 1); \vec{l} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$$

Задача 9. Найти экстремумы функции двух переменных: $z = 2x^3 - 2y^3 - 6xy$

Вариант 3

Задача 1. Написать уравнение касательной и нормали в точках с абсциссами a, b и c к кривым:

1.

$$y = 3x^3 - 4x; a = 1, b = 1, c =$$

$$y = \frac{2}{16}x^3 + 1, a = 1, b = 0, c = 12, c =$$

Задача 2. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на данном отрезке:

$$1. y = 7x^4 - x^3 - 3, [1; 1];$$

$$2. y = 2x^5, [0; 4].$$

Задача 3. Найти экстремумы и интервалы монотонности функций:

$$1. y = \frac{2x^3}{3} - 5x^2 - 2x;$$

$$4. y = \frac{1}{9-x^2};$$

$$2. y = 2 - 3x^4 - \frac{x^6}{2};$$

$$5. y = x \ln 2x.$$

$$3. y = 2x - \frac{5}{x};$$

Задача 4. Найти асимптоты следующих кривых:

$$1. y = \frac{3}{x-1};$$

$$3. y = 2x^2 - \frac{3}{x};$$

$$2. y = \frac{5x}{4-x};$$

$$4. y = 4xe^{-x}.$$

Задача 5. Найти точки перегиба и интервалы выпуклости функций:

$$1. y = 3x^5 - 8x^4;$$

$$2. y = 5x^2 - 4x^3;$$

$$3. y = \frac{10x^2}{1 - 2x^2};$$

$$4. y = 7xe^{2x}.$$

Задача 6. Построить графики функций:

$$1. y = 2x^3 - 5x^2 - 11;$$

$$2. y = \frac{4}{x^2 - 5x - 6}.$$

Задача 7. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ следующих функций:

$$1. z = x^3 - y^2 - 6xy - x^2 - y^2;$$

$$2. z = \arcsin(4x^2 - 3y^2);$$

$$3. z = \operatorname{tg} \frac{7x - 5y}{6x - 9y} - 2^{3x - 6y}.$$

Задача 8. Найти в точке A градиент функции $z = z(x, y)$ и производную в направлении вектора $\vec{l}$, если:

$$1. z = y^2 \ln x; A(e; 1); \vec{l} = 2\vec{i} - \vec{j};$$

$$2. z = y^2 x; A(2; 5); \vec{l} = 4\vec{i} - 3\vec{j}.$$

Задача 9. Найти экстремумы функции двух переменных:

$$z = 2x^2 - xy - 5y^2 - 7x - 4y - 12.$$

Вариант 4

Задача 1. Написать уравнение касательной и нормали в точках с абсциссами a , b и c к кривым:

$$1. y = 3x^4 - 5x^2; a = 1, b = 2, c = 6$$

Задача 2. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на данном отрезке:

$$1. y = x^3 - 5x^2 - 2x - 10, x \in [0; 2];$$

$$2. y = \frac{x}{x^2 + 5}, x \in [0; 2];$$

Задача 3. Найти экстремумы и интервалы монотонности функций:

$$1. y = \frac{x^4}{7} - 3x^2;$$

$$3. y = \frac{x}{x^2 - 1} - \frac{x}{12};$$

$$2. y = \frac{2x^3}{5} - 2x^4 - \frac{x^2}{2};$$

$$4. y = 7x - \frac{11}{x};$$

$$5. y = 3x^3 e^{-4x}.$$

Задача 4. Найти асимптоты следующих кривых:

$$1. y = \frac{7}{x - 3};$$

$$3. y = \frac{3x^2 - 10x + 3}{x - 4};$$

$$2. y = \frac{2x}{x - 1};$$

$$4. y = xe^{2x}.$$

Задача 5. Найти точки перегиба и интервалы выпуклости функций:

$$1. y = 5x^4 - 8x^3;$$

$$3. y = \frac{5x^4}{x^3 - 8};$$

$$2. y = 6x^5 - 9x^2;$$

$$4. y = 2xe^{3x}.$$

Задача 6. Построить графики функций:

1. $y = 8 - 5x^2 - 7x^4$;

2. $y = \frac{3x^3}{9 - x^2}$.

Задача 7. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ следующих функций:

1. $z = 5x^2 - 6y^3 - 5xy - 4x - 8y$;

3. $z = \cos(x - y) + \frac{3x - 4y}{x - y}$.

2. $z = e^{x_2} - \sin 3y - \arctg(5x - 7y)$;

Задача 8. Найти в точке A градиент функции $z(x, y)$ и производную в направлении вектора $\vec{l}$, если:

1. $z = y^2(2x - 3)$; $A(1; 1)$; $\vec{l} = 2\vec{i} - \vec{j}$;

2. $z = 2x^2 - y$; $A(1; 1)$; $\vec{l} = 2\vec{i} - \vec{j}$.

Задача 9. Найти экстремумы функции двух переменных:

1. $z = x^2 - xy + y^2 - x^2 - y^2$.

Вариант 5

Задача 1. Написать уравнение касательной и нормали в точках с абсциссами a , b и c к кривым:

1. $y = 5x^2 - 4x - 7$; $a = 0$, $b = 2$, $c = 1$.

2. $y = \frac{2}{x} - 3x$, $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$.

Задача 2. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на данном отрезке:

1. $y = 7x^3 - 3x^2 - 1$, $x \in [1; 3]$;

2. $y = \frac{2}{x} - 3x$, $x \in [1; 2]$.

Задача 3. Найти экстремумы и интервалы монотонности функций:

1. $y = 4x - 3x^2$;

4. $y = \frac{5x^2}{2 - x}$;

2. $y = 1 - 5x - \frac{6x^4}{5}$;

5. $y = xe^{\frac{x}{5}}$.

3. $y = \frac{x}{x^2 + 7}$;

Задача 4. Найти асимптоты следующих кривых:

1. $y = \frac{10}{x - 3}$;

3. $y = \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 3}$;

2. $y = \frac{2x}{x - 5}$;

4. $y = 3x^{\frac{1}{x^2}}$.

Задача 5. Найти точки перегиба и интервалы выпуклости функций:

1. $y = 3x^4 - 7x$;

3. $y = \ln(x - 1)$;

2. $y = 9x^3 - 2x^2 - 11$;

4. $y = 3x - \frac{1}{x}$;

Задача 6. Построить графики функций:

1. $y = 5x^3 - 11x^2 - 20x$;

2. $y = \frac{3x^3}{(x - 4)^2}$.

Задача 7. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ следующих функций:

1. $z = x^5 - 4y^3 + 5xy + x^2$;
2. $z = \operatorname{ctg}(x^2 + y^3 + 2) \cos x^2 y$;

Задача 8. Найти в точке A градиент функции $z = \ln(x^2 + y^3)$ и производную в направлении вектора $\vec{l}$, если:

1. $z = \sin(2x + y)$; $A(8; 0)$; $\vec{l} = 2\vec{i} - \vec{j}$;
2. $z = 2x^2 + 3y^2 + 4$; $A(1; 1)$; $\vec{l} = \vec{i} - \vec{j}$.

Задача 9. Найти экстремумы функции двух переменных:

$$z = x^2 + 5xy + y^2 + x^2 + y^2 + 21x + 1$$

Вариант 6

Задача 1. Написать уравнение касательной и нормали в точках с абсциссами a , b и c к кривым:

1. $y = 5x^3 - 6x^2$; $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$;
2. $y = \cos x$, $a = 10$, $b = 15$, $c = 20$.

Задача 2. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на данном отрезке:

1. $y = 4x^3 - 2x^2 + x$, $x \in [0, 1]$;
2. $y = 2x + \frac{x^2}{4}$, $x \in [0, 1]$.

Задача 3. Найти экстремумы и интервалы монотонности функций:

1. $y = \frac{5x^3}{2} + 3x^2$;
2. $y = 2x^3 + 3x^2 + 5x^4$;
3. $y = 5x^2 + \frac{x^4}{2}$;
4. $y = \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2}$;
5. $y = 3xe^{\frac{x^2}{2}}$.

Задача 4. Найти асимптоты следующих кривых:

1. $y = \frac{7}{x + 4}$;
2. $y = \frac{3x}{x + 5}$;
3. $y = \frac{2x^2 + 5x + 2}{x + 1}$;
4. $y = xe^{3x}$.

Задача 5. Найти точки перегиба и интервалы выпуклости функций:

1. $y = 6x^5 + 4x^3$;
2. $y = 5x^3 + 3x^2 + 13$;
3. $y = \ln 2x + x$;
4. $y = 2x + \frac{3}{x^2}$.

Задача 6. Построить графики функций:

1. $y = 8x^3 + 5x^2 + 22x$;
2. $y = \frac{4x}{2x + 7}$.

Задача 7. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ следующих функций:

$$1. z = 5x^2 - 4y^3 + 5xy - 8x + 5y;$$

$$3. z = 2^{6x} \sin \frac{y^3}{x^2}.$$

$$2. z = \sin(2x + 3y) + 2^{xy}$$

Задача 8. Найти в точке A градиент функции $z(x, y)$ и производную в направлении вектора $\vec{l}$, если:

$$1. z = y \ln^2 2x; A(1;1); \vec{l} = 2\vec{i} - 2\vec{j}$$

$$2. z = y^2 + x^3 + 1; A(1;5); \vec{l} = 2\vec{i} - \vec{j}$$

Задача 9. Найти экстремумы функции двух переменных:
 $z = 2x^2 - 5xy + 2y^2 - 4x + 3y + 10.$

Вариант 7

№1. Написать уравнения касательной и нормали в точках с абсциссами a, b и c к кривым:

$$1. y = 2x^3 - 4x + 5;$$

$$2. y = \sin x; a = 0, b = \pi/5,$$

$$a = 0, b = \pi, c = 1;$$

$$c = \pi/20.$$

№2. Найти наименьшее и наибольшее значение функции на данном отрезке:

$$1. y = 4x^4 - 7x^3 + 2, [3;4];$$

$$2. y = \frac{x}{7} - \frac{7}{x}, [0;5]$$

№3. Найти экстремумы и интервалы монотонности функций:

$$1. y = 5x - 7x^2;$$

$$4. y = \frac{3x^2}{x^2 + 5};$$

$$2. y = 2 - 6x + \frac{x^4}{9};$$

$$5. y = xe^{\frac{x}{3}}.$$

$$3. y = \frac{x}{5} - \frac{5}{x};$$

№4. Найти асимптоты следующих кривых:

$$1. y = \frac{9}{x - 12};$$

$$3. y = \frac{x^2 - 10x + 21}{x - 4};$$

$$2. y = \frac{2x}{x^2 + 11};$$

$$4. y = xe^{6x}.$$

№5. Найти точки перегиба и интервалы выпуклости функций:

$$1. y = 6x^5 - 5;$$

$$3. y = \ln x - \frac{1}{x^2};$$

$$2. y = 7x^2 - 4x^2;$$

$$4. y = 2x - \frac{1}{x^2};$$

№6. Построить графики функций:

$$1. y = \frac{1}{7}x^5 - 3x^2;$$

$$2. y = \frac{2x^3}{5x^2 + 2};$$

№7. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ следующих функций:

$$1. z = 5x^3 + 4y^3 + 6e^y + 7e^x + 8y;$$

$$3. z = e^{x^2} + \cos 3y + \arcsin \frac{4x + 5}{5y + 7}$$

$$2. z = \sin(5x^2 + 3y^2) + \ln(2x + 3y);$$

№8. Найти в точке А градиент функции $z(x,y)$ и производную в направлении вектора l , если:

$$1. z = 3x^2 + x^2 + 1; A(1;5); l = 2i + j;$$

$$2. z = 4 \ln(5x + 7); A(2;1); l = 6i + 8j.$$

№9. Найти экстремумы функции двух переменных:

$$z = 2xy + 3y + x^2 + 3y^2 + 5x + 7$$

Вариант 8

№1. Написать уравнения касательной и нормали в точках с абсциссами a, b и скривым:

$$1. y = x^3 + x; a = 1, b = 2;$$

$$2. y = x \sin 3; a = \pi/12, b = \pi/18, c = \pi/9.$$

№ 2. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на данном отрезке:

$$1. y = 5x^3 + 4x^2, [2; 3]$$

$$2. y = x + \frac{1}{x}, [3; 2].$$

№ 3. Найти экстремумы и интервалы монотонности функций:

$$1. y = \frac{x^3}{5} + 7x; \quad 2. y = 3x^3 + 5x^2 + 11x; \quad 3. y = \frac{(x+2)^2}{x^2 + 3};$$

$$4. y = 4x^3 + \frac{x^4}{5}; \quad 5. y = 2xe^{\frac{x^2}{3}}.$$

№ 4. Найти асимптоты следующих кривых:

$$1. y = \frac{12}{x+9};$$

$$3. y = \frac{x^2}{x+2};$$

№ 5. Найти точки перегиба и интервалы выпуклости функций:

$$1. y = 7x^5 + 5x + 2;$$

$$3. y = 5x + \frac{2}{x^2};$$

$$2. y = 2x^3 + 11x^2;$$

$$4. y = 3x + \ln x.$$

№ 6. Построить графики функций:

$$1. y = 3x^3 + 14x^2 + 42x;$$

$$2. y = \frac{5x}{x^2 + 9}.$$

№7. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ следующих функций:

$$1. z = 2x^2 + 3y^2 + 5xy + 2x + 5y$$

$$3. z = x^3 y + \ln \frac{6x + 3y}{5x + y}$$

$$2. z = \cos(5x^4 + 2y^4) + \operatorname{tg} \frac{x}{y}$$

№8. Найти в точке А градиент функции $z(x,y)$ и производную в направлении вектора l , если:

$$1. z = 2x^2 + 3y; A(0;3); \quad \vec{l} = 4\vec{i} + 3\vec{j};$$

$$2. z = y^2 \sin 3x + 4x + 5y; A(0;2); \vec{l} = \vec{i} + 3\vec{j}.$$

№9. Найти экстремумы функции двух переменных:

$$z = x^3 + 5xy + 7y^3 + 1$$

Вариант 9

№1. Написать уравнения касательной и нормали в точках с абсциссами a, b и c к кривым:

$$1. y = x^5 + 4x^2 + 3; a = 1, b = 2, c = 1; \quad 2. y = \operatorname{tg} 2x, a = \pi/8, b = \pi/6, c = \pi/12.$$

№2. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на данном отрезке:

$$1. y = 5x^3 + 2x^2, [2;5]$$

$$2. y = \frac{1x + 4}{x + 4}, [1;6]$$

№3. Найти экстремумы и интервалы монотонности функций:

$$1. y = \frac{x^5}{5} + 2x;$$

$$2. y = 7x^2(x + 2);$$

$$3. y = \frac{3 + x^2}{x + 13};$$

$$4. y = 15x + \frac{7}{x};$$

$$5. y = x + 9 \ln x.$$

№4. Найти асимптоты следующих кривых:

$$1. y = \frac{3x}{x + 4};$$

$$3. y = \frac{3x^2}{x^2 + 7};$$

$$2. y = \frac{1}{x^2 + 25};$$

$$4. y = \frac{1}{x}.$$

№5. Найти точки перегиба и интервалы выпуклости функций:

$$1. y = x^5 + 6x + 1;$$

$$3. y = \frac{9}{2 + x^2};$$

$$2. y = 4x^3 + 5x^2;$$

$$4. y = \frac{5 \ln x}{x}.$$

№6. Построить графики функций:

$$1. y = \frac{x^5}{5} + 3x + \frac{7}{2};$$

$$2. y = 4 + \frac{11}{x^2 + 36}.$$

№7. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ следующих функций:

1. $z = 5x_3 - 7y^2 - 9xy - 3x - 9y - 34$;

3. $z = e^{7xy} \sin^2(2x - 3y)$.

2. $z = \ln(x_3 - y^3 - 1) \sin^2 y_2$;

№8. Найти в точке А градиент функции $z(x,y)$ и производную в направлении вектора l , если:

1. $z = 3x^2 - x$; $A(2;5)$; $\vec{l} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$;

2. $z = y \ln^2 2x$; $A(1;1)$; $\vec{l} = 2\vec{i} - 2\vec{j}$.

№9. Найти экстремумы функции двух переменных: $z = 5x^2 - 2y^2 - 2x^3 - xy^2$

Вариант 10

№1. Написать уравнения касательной и нормали в точках с абсциссами a, b и скривым:

1. $y = x^5 - 4x^2$; $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$, $c = 4$;

2. $y = \cos 3x$; $a = \pi/9$, $b = \pi/12$, $c = \pi/18$.

№2. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на данном отрезке:

1. $y = 4x^2 - 5x$

2. $y = \frac{x - 11}{x + 11}$, $[0; 12]$.

7, $[-1; 4]$;

№3. Найти экстремумы и интервалы монотонности функций:

1. $y = \frac{x^3}{15} - 3x^2$;

2. $y = 4x^4 - 9x^3 - 7x^2$;

3. $y = \frac{9 - x^2}{x + 2}$;

4. $y = \frac{x}{6} - \frac{6}{x}$;

5. $y = 7e^{x_2}$.

№4. Найти асимптоты следующих кривых:

1. $y = \frac{8x}{x + 9}$;

3. $y = \frac{2x^2}{x^2 + 1}$;

2. $y = \frac{13x}{x^2 + 25}$;

4. $y = \frac{3}{e^{x^2}} - 7$.

№5. Найти точки перегиба и интервалы выпуклости функций:

1. $y = \frac{1}{3}x^4 - 5x^2$;

3. $y = \frac{x}{1 + x^2}$;

2. $y = 7x^3 - 3,5x - 3$;

4. $y = e^{x_2}$

№6. Построить графики функций:

1. $y = \frac{2}{5}x^3 - 10x^2$;

2. $y = \frac{4x^2}{x + 3,2}$.

№7. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ следующих функций:

$$1. z = x^3 + 4y^2 + 5xy + 7x;$$

$$3. z = e^{x+5y} \cos \frac{6x+5y}{5x+4y}.$$

$$2. z = \ln(x+y) + \frac{x}{y};$$

№8. Найти в точке А градиент функции $z(x,y)$ и производную в направлении вектора l , если:

$$1. z = x^3 + 2^{xy+y^2}; A(1;2); l = (1;2);$$

$$2. z = xy^2 + 4x^3y; A(2;3); l = 3i + 4j$$

№9. Найти экстремумы функции двух переменных: $z = x^3 + 4xy + 7y$

Задача 1. Проверить, является ли данная функция $u = \arctg 3x + 2t$ решением уравнения

$$2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = 0.$$

Задача 2. Решить дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 8y + 1, \text{ где } u = u(x, y)$$

Задача 3. Определить тип дифференциального уравнения и найти его характеристики:

$$2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + 3 \frac{\partial u}{\partial y} + u = 0.$$

Задача 4. Привести к каноническому виду уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 4u = 0$$

Задача 5. Решить задачу Коши для волнового уравнения методом Даламбера:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \text{ если } u|_{t=0} = x^3; \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0.$$

Задача 6. Методом Фурье решить уравнение колебания струны:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq 2, \text{ если } u|_{t=0} = x^2 - x; \quad u|_{x=0,t} = u|_{x=2,t} = \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0,t} = \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=2,t} = 0$$

Задача 7. Найти решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq 4, \quad t \geq 0,$$

удовлетворяющее краевым условиям:

$$u(x, t) = 0, \quad 0 \leq x \leq 2, \quad u(0, t) = u(4, t) = 0.$$

Задача 8. Решить уравнение теплопроводности для неограниченного стержня:

$$u_t = 4u_{xx}, \quad 0 \leq x \leq 6, \quad u(x, 0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

если

Методические указания по выполнению заданий

Для выполнения предложенных заданий на практических занятиях необходимо изучить материал лекции по данной теме. Основные определения и теоремы. При этом следует учитывать, что предложенный в лекции материал частично опирается на некоторые разделы из школьного курса математики, которые также желательно было бы повторить для хорошего и полного усвоения дисциплины.

Практическое занятие

Тема занятия «Неопределенный и определенный интегралы»

Цель занятия: выяснить задачу интегрального исчисления. Ввести понятие неопределенного интеграла, определенного интеграла, несобственного интеграла. Выяснить задачу интегрального вычисления и научиться применять основные методы интегрирования на практике при решении задач. Научить применять основные методы интегрирования при вычислении неопределенного и определенного интеграла.

Задания

Вариант №1

VI. Найти интегралы, используя табличные формулы и свойство линейности.

4)

$$1) \int (5x^4 - 7x^2) dx$$

$$2) \int \frac{11}{1+x^2} dx$$

$$2) \int 4e^x - 5\sin x dx$$

$$5) \int 5^x dx$$

$$3) \int \frac{x^3 dx}{x^2 + 1}$$

$$6) \int \frac{\tan x}{\sin 2x} dx$$

VII. Найти интегралы методом подстановки.

$$1) \int \frac{e^x dx}{e^x - 1}$$

$$6) \int \frac{6\operatorname{tg}^2 x - 5\operatorname{tg} x - 1}{\cos^2 x} dx$$

$$2) \int \frac{dx}{x \ln x}$$

$$7) \int \frac{4}{x^2} dx$$

$$3) \int \frac{x dx}{x^2 + 5}$$

$$8) \int \frac{x - 4\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$$

$$4) \int \frac{dx}{\sin^2 7x}$$

$$5) \int \frac{2}{\sin^8 x} \cos^5 x dx$$

$$9) \int \frac{x}{1+x} dx$$

$$10) \int \frac{1}{x^2 + 1} dx$$

VIII. Выполнить интегрирование почастям.

$$1) \int x e^x dx$$

$$3) \int \frac{x dx}{\cos^2 x}$$

$$5) \int x \arctg x dx$$

$$2) \int \arccos 3x dx$$

$$4) \int x^2 \sin 3x dx$$

$$6) \int \cos \ln x dx$$

IX. Вычислить интегралы от рациональных дробей.

$$1) \int \frac{x^2 + 2x + 5}{x^2 + 5} dx$$

$$2) \int \frac{x dx}{x^2 + 1} dx$$

$$3) \int \frac{11x + 6}{x^2 + 1} dx$$

X. Вычислить по таблицам.

$$1) \int \frac{5x + 7}{x^2 + 2x + 10} dx$$

$$2) \int x \arctg \frac{x}{3} dx$$

$$3) \int \frac{3}{\ln 3x + 1} dx$$

$$4) \int \frac{dx}{\sin x}$$

Вариант №2

VI. Найти интегралы, используя табличные формулы и свойство линейности.

$$1) \int (2x^5 + 7x^3 + x) \frac{3}{2} dx$$

$$2) \int (3x + 4 \cos x + e^x) dx$$

$$4) \int \frac{\sin x + \cos x}{\sin 2x} dx$$

$$5) \int \frac{1}{x^3} e^{\frac{x}{3}} dx$$

$$3) \int \frac{3x^2 + 4}{x^2 + 3} dx$$

$$6) \int \frac{5}{1+x^2} dx$$

VII. Найти интегралы методом подстановки.

$$1) \int \frac{\ln x + 1}{x + \ln^2 x} dx$$

$$6) \int \frac{2 \arctg x + x}{1+x^2} dx$$

$$2) \int \frac{x^2 dx}{x^6 + 9}$$

$$7) \int \frac{dx}{x^2 \cos^2 \frac{1}{x}}$$

$$3) \int \sin^5 x dx$$

$$8) \int \frac{dx}{x^2 + x^2}$$

$$4) \int \frac{x^4 dx}{x^5 + 6}$$

$$9) \int \frac{4}{x^2} dx$$

$$5) \int \frac{dx}{e^x \sin^2 e^x}$$

$$10) \int \frac{7}{2 \cos x} dx$$

VIII. Выполнить интегрирование почастям.

1) $\int x e^{-x} dx$

3) $\int x \arctg x dx$

5) $\int x \sin 3x dx$

2) $\int \frac{x \cos x dx}{\sin x}$

4) $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$

6) $\int e^{\frac{3}{x}} dx$

IX. Вычислить интегралы от рациональных дробей.

1) $\int \frac{x dx}{x^3 + 8}$

2) $\int \frac{x dx}{x^4 + 4x^2 + 4}$

3) $\int \frac{dx}{x^2 + 1}$

X. Вычислить по таблицам.

1) $\int \sin^2 3x \cos^3 3x dx$

2) $\int \sin^2 3x \cos^3 3x dx$

3) $\int \lg^3 7x dx$

4) $\int \ln^2 2x^3 dx$

Вариант №3

I. Найти интегралы, используя табличные формулы и свойство линейности.

1)

$\int (4x^3 - 2x^2 + \frac{11}{x^3}) dx$

4) $\int (\frac{2}{\cos^2 x} - \frac{6}{1+x^2}) dx$

2) $\int (5^x + 7e^x + 2^x) dx$

5) $\int \frac{x^2 + 1}{x^2} dx$

3) $\int \frac{x + 2x}{1+x^3} dx$

6) $\int \frac{1}{\sin x \cos 2x} dx$

II. Найти интегралы методом подстановки.

1) $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx$

6) $\int \frac{dx}{x^2 + 3}$

2) $\int \frac{x e^{x^2}}{1 + 3e^{x^2}} dx$

7) $\int x^{2x} dx$

3) $\int \frac{\ln^2 x + 4 \ln x + 1}{x} dx$

8) $\int \frac{2^{\arcsin x} + x^2}{1} dx$

4) $\int 2^{\cos x} \sin x dx$

9) $\int \frac{1}{\lg x^3} dx$

5) $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$

10) $\int \frac{\cos^2 x}{x} dx$

III. Выполнить интегрирование почастям.

1) $\int x^2 e^{2x} dx$

3) $\int \arctg \frac{2x}{1} dx$

5) $\int x \sin 4x dx$

2) $\int \frac{x \sin x}{\cos x} dx$

4) $\int \frac{\ln x}{x} dx$

6) $\int \sin x dx$

IV. Вычислить интегралы от рациональных дробей.

1)

2)

3) $\int \frac{x dx}{x^2 + 1}$

$$\frac{x dx}{x^2 + 1}$$

$$\frac{x^2 + 1}{x^2 + 1} dx$$

V. Вычислить по таблицам.

1) $\int \frac{x dx}{x^2 + 1}$ 2) $\int \frac{1}{x^2 + 1} dx$ 3) $\int \frac{1}{x^2 + 1} dx$ 4) $\int \frac{1}{x^2 + 1} dx$

1) $\int \frac{x dx}{x^2 + 1}$ 2) $\int \sin^5 7x \cos^3 7x dx$ 3) $\int \operatorname{ctg}^3 4x dx$ 4) $\int e^x \cos 3x dx$

Вариант №4

I. Найти интегралы, используя табличные формулы и свойство линейности.

1) $\int \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 1} dx$

2) $\int \frac{x^2 + 4x + 7}{x^2 + 1} dx$

3) $\int \frac{x^2 + e^x}{e^x + x^2} dx$

4) $\int \frac{x^2 + 3}{x^2 + 1} dx$

5) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x + \sin^2 x} dx$

6) $\int \frac{\operatorname{tg} x}{1 + x^2} dx$

II. Найти интегралы методом подстановки.

1) $\int \frac{e^x + \cos x}{x^2 + 1} dx$

2) $\int \frac{5^{\arcsin x} + x^2}{1 + x^2} dx$

3) $\int \cos^{10} x + \sin^3 x dx$

4) $\int \frac{1 + \sin x}{x + \cos x} dx$

5) $\int \frac{7 + 3 \sin x}{\cos^2 x} dx$

6) $\int \frac{\ln x + 1}{x + 1} dx$

7) $\int \frac{e^{\operatorname{tg} 2x} + \operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x} dx$

8) $\int \frac{x^2 + 25}{x^2 + 25} dx$

9) $\int \frac{dx}{x^3 + x^2}$

10) $\int \frac{x^2 + 2}{3 + 2x^7} dx$

III. Выполнить интегрирование почастям.

1) $\int x \cos^2 x dx$ 2) $\int \frac{x^2}{x^2 + 4} dx$ 3) $\int \operatorname{arctg} x dx$ 4) $\int \ln x dx$ 5) $\int \frac{\arcsin \frac{x}{2}}{x} dx$ 6) $\int e^x \sin 2x dx$

IV. Вычислить интегралы от рациональных дробей.

1) $\int \frac{2x^2 + x + 4}{x^3 + x^2 + 4x + 4} dx$ 2) $\int \frac{dx}{x^2 + 3x^2}$ 3) $\int \frac{1}{2x + 1} dx$

V. Вычислить по таблицам.

1) $\int \frac{1}{x^2 + 1} dx$ 2) $\int \frac{1}{x^2 + 1} dx$ 3) $\int \frac{1}{x^2 + 1} dx$ 4) $\int e^x \cos 2x dx$

$$\int (x^2 - 4x + 5) dx$$

$$\int \frac{dx}{\cos 2x}$$

$$\int \frac{\operatorname{tg} 3x - 5}{3} dx$$

Вариант №5

I. Найти интегралы, используя табличные формулы и свойство линейности.

4)

$$1) \int x^2 dx$$

$$2) \int x^2 dx$$

$$3) \int x dx$$

$$\int (2 \sin x - 4 \cos x) \frac{1}{\sin x} dx$$

$$\int \frac{x^4}{x^2} dx$$

$$5) \int \frac{\operatorname{ctg}^2 x}{\cos x} dx$$

$$6) \int \frac{x^4}{1} dx$$

II. Найти интегралы методом подстановки.

$$1) \int \frac{\sin x dx}{7 - 4 \cos x}$$

$$2) \int \frac{dx}{e^x - 1}$$

$$3) \int \frac{x - 3 \arctg x}{1 + x^2} dx$$

$$4) \int e^{\cos^2 x} \sin 2x dx$$

$$5) \int \frac{dx}{x \cos^2 x \ln x}$$

$$6) \int x^3 dx$$

$$7) \int \frac{x e^{\arcsin x}}{1 + x^2} dx$$

$$8) \int \cos^3 x dx$$

$$9) \int \frac{e^x dx}{4 - e^{2x}}$$

$$10) \int \frac{xdx}{1 + x^4}$$

III. Выполнить интегрирование почастям.

$$1) \int x^2 \sin x dx$$

$$3) \int \ln^3 x dx$$

$$5) \int \frac{dx}{\cos^3 x}$$

$$2) \int x e^{3 - 2x} dx$$

$$4) \int x^2 \arctg x dx$$

$$6) \int x^5 e^{x^2} dx$$

IV. Вычислить интегралы от рациональных дробей.

$$1) \int \frac{dx}{x^3 - 8}$$

$$2) \int \frac{3x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1} dx$$

$$3) \int \frac{x^8}{x^2 - 2} dx$$

V. Вычислить по таблицам.

$$1) \int (x^2 - x) dx$$

$$2) \int \operatorname{tg}^3 5x dx$$

$$3) \int \frac{3}{\sin 2x - 5} dx$$

$$4) \int e^x \cos 3x dx$$

Вариант №6

I. Найти интегралы, используя табличные формулы и свойство линейности.

4)

$$1) \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) dx$$

$$\int \frac{2}{x^2} dx$$

$$2) \int e^x \frac{1}{\cos x} dx$$

$$5) \int \lg^2 x dx$$

$$3) \int \frac{\sin^3 x}{\sin x} dx$$

$$6) \int \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} dx$$

II. Найти интегралы методом подстановки.

$$1) \int \frac{2^x dx}{x^3}$$

$$6) \int \frac{e^{\lg x}}{\cos^2 x} dx$$

$$2) \int \frac{dx}{x \ln^2 x}$$

$$7) \int \frac{1}{x^2} dx$$

$$3) \int \frac{x dx}{\cos^2 x^2}$$

$$8) \int \frac{x \cos x}{x} dx$$

$$4) \int \frac{\arcsin x}{1-x^2} dx$$

$$9) \int \frac{1}{x^3 \lg x} dx$$

$$5) \int \frac{dx}{\cos^2 x^3}$$

$$10) \int \lg x \cos x^2 dx$$

III. Выполнить интегрирование почастям.

$$1) \int x \cos^2 x dx$$

$$3) \int \frac{\ln x}{x^3} dx$$

$$5) \int x^2 e^{-x} dx$$

$$2) \int \frac{\arcsin x}{x} dx$$

$$4) \int \arctg 3x dx$$

$$6) \int \frac{\ln \cos x}{\sin^2 x} dx$$

IV. Вычислить интегралы от рациональных дробей.

$$1) \int \frac{7x+15}{x^3+2x^2+5x} dx$$

$$2) \int \frac{6x+9}{x^2+1} dx$$

$$3) \int \frac{4dx}{x^2}$$

V. Вычислить по таблицам.

$$1) \int \frac{x+7}{x^2+2x+3} dx$$

$$2) \int \sin^4 2x dx$$

$$3) \int \frac{dx}{\cos x}$$

$$4) \int x^2 \arctg \frac{x}{2} dx$$

Вариант №7

I. Найти интегралы, используя табличные формулы и свойство линейности.

$$1) \int 2x^2 + 3x + 4x^5 dx$$

$$4) \int \frac{1 + \sin 2x}{\sin x + \cos x} dx$$

$$2) \int \frac{1}{7x+3} + 2x + 3 \lg x dx$$

$$5) \int \frac{1}{x^2+1} dx$$

$$3) \int \frac{x^3}{x^2+1} dx$$

$$6) \int \frac{1+x^2}{x} dx$$

II. Найти интегралы методом подстановки.

- 1) $\int x^2 e^{-x^3} dx$
- 2) $\int \frac{x dx}{x^4 - 4}$
- 3) $\int \sin^4 x \cos^5 x dx$
- 4) $\int x^2 dx$
- 5) $\int x^2 dx$
- 6) $\int \frac{\tan x}{\cos x \tan x} dx$
- 7) $\int \frac{x dx}{x^4 - 3x^2}$
- 8) $\int \frac{\arcsin x}{1 - x^2} dx$
- 9) $\int \frac{x \sin x}{2 \cos x} dx$
- 10) $\int \frac{e^{\ln x}}{\ln x} dx$

III. Выполнить интегрирование почастям.

- 1) $\int x e^{2x} dx$
- 2) $\int \frac{\ln x dx}{x^2}$
- 3) $\int \arcsin x dx$
- 4) $\int \arctg 4x dx$
- 5) $\int \frac{x dx}{\sin^2 x}$
- 6) $\int e^x \sin x dx$

IV. Вычислить интегралы от рациональных дробей.

- 1) $\int \frac{x^2 - 2}{x^3 - 2x} dx$
- 2) $\int \frac{x - 1}{x^2 - 2x} dx$
- 3) $\int \frac{5x dx}{x^2 - 4x - 1}$

V. Вычислить по таблицам.

- 1) $\int x^4 dx$
- 2) $\int \frac{dx}{\cos 2x}$
- 3) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$
- 4) $\int \frac{e^x}{\cos 2x} dx$

Вариант №8

I. Найти интегралы, используя табличные формулы и свойство линейности.

- 1) $\int 5x^7 - 4x^6 + 3x^2 - 9 dx$
- 2) $\int 3^x dx$
- 3) $\int \frac{x^2}{x^4 - 2} dx$
- 4) $\int \frac{12}{5x^2} + \frac{4}{x^2} dx$
- 5) $\int \frac{7 - 5 \cos^2 x - 6 \cos^3 x}{\cos^2 x} dx$
- 6) $\int \frac{dx}{\tan^2 x}$

II. Найти интегралы методом подстановки.

- 1) $\int \frac{4x^5}{x^2 - 5} dx$
- 2) $\int \frac{x dx}{x^2 - 3}$
- 3) $\int \frac{dx}{e^{2x} - 9}$
- 4) $\int \frac{dx}{e^x - x}$
- 5) $\int \frac{e^x dx}{e^{2x} - 9}$

$$3) \int \frac{x^4 dx}{4x^3}$$

$$8) \int e^{\cos x} \sin x dx$$

$$4) \int \cos 7x \cdot e^{6x} dx$$

$$9) \int \cos^7 x \sin^3 x dx$$

$$5) \int \frac{\ln^2 x}{x} dx$$

$$10) \int \frac{dx}{1 + \sin x}$$

III. Выполнить интегрирование почастям.

$$1) \int x e^{4x} dx$$

$$3) \int \ln x dx$$

$$5) \int e^{2x} \cos 3x dx$$

$$2) \int \ln x dx$$

$$4) \int \frac{x dx}{\sin^2 x}$$

$$6) \int \frac{16 dx}{x^2}$$

IV. Вычислить интегралы от рациональных дробей.

$$1) \int \frac{3x + 1}{x^2 + 2x + 4} dx$$

$$2) \int \frac{x^3 + x}{x^2 + 1} dx$$

$$3) \int \frac{5x + 3}{x^2 + 2x + 5} dx$$

V. Вычислить по таблицам.

$$1) \int \frac{5x + 7}{x^2 + 2x + 10} dx$$

$$2) \int \arctg \frac{x}{3} dx$$

$$3) \int \frac{3}{\ln(3x + 1)} dx$$

$$4) \int \frac{dx}{\sin x}$$

Вариант №9

I. Найти интегралы, используя табличные формулы и свойство линейности.

$$1) \int (3x^3 - 2x^2 + x + 4) dx$$

$$2) \int \left(\frac{1}{e^x} + \frac{2}{x} + \frac{4}{\sin^2 x} \right) dx$$

$$3) \int (\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg}^2 x) dx$$

$$4) \int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{7}{x^4} \right) dx$$

$$5) \int \left(\frac{1}{1+x} + \frac{5}{1-x} \right) dx$$

$$6) \int \left(\frac{1}{\operatorname{ctg} x} + \frac{2}{\cos x} + \frac{1}{x^2} \right) dx$$

II. Найти интегралы методом подстановки.

$$1) \int 4^{\sin x} \cos x dx$$

$$6) \int 2 \operatorname{ctg}^2 \ln x - 3 \operatorname{ctg} \ln x + 1 dx$$

$$2) \int \frac{dx}{x \ln^2 x + 7}$$

$$7) \int \frac{\operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{ctg} x + 1}{\sin^2 x} dx$$

$$3) \int \frac{e^{\arcsin x}}{1+x} dx$$

$$8) \int 9 dx$$

$$4) \int \frac{\sin^3 x}{\cos^{15} x} dx$$

$$9) \int \frac{2 \arctg x + x^3}{1+x^2} dx$$

$$5) \int \frac{x dx}{\cos^2 x + 4x^2 + 1}$$

$$10) \int \frac{xdx}{x^4 + 16}$$

III. Выполнить интегрирование почастям.

- 1) $\int x^2 e^x dx$ 3) $\int \ln^2 x dx$ 5) $\int \frac{\sin^4 x dx}{\cos^3 x}$
 2) $\int \arcsin x dx$ 4) $\int x \sin 3x dx$ 6) $\int \sin^3 x dx$

IV. Вычислить интегралы от рациональных дробей.

- 1) $\int \frac{9x}{x^2 + 1} dx$ 2) $\int \frac{1 + 3x}{x^2 + 1} dx$ 3) $\int \frac{7dx}{2x^2 + 1}$

V. Вычислить по таблицам.

- 1) $\int \sqrt{4x + 5} dx$ 2) $\int \frac{dx}{\cos 2x}$ 3) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$ 4) $\int \frac{e^x}{\cos 2x} dx$
 5) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$ 6) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$ 7) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$ 8) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$
 9) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$ 10) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$ 11) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$ 12) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$
 13) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$ 14) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$ 15) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$ 16) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$
 17) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$ 18) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$ 19) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$ 20) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$
 21) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$ 22) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$ 23) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$ 24) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$
 25) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$ 26) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$ 27) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$ 28) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$
 29) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$ 30) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$ 31) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$ 32) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$
 33) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$ 34) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$ 35) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$ 36) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$
 37) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$ 38) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$ 39) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$ 40) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$
 41) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$ 42) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$ 43) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$ 44) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$
 45) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$ 46) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$ 47) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$ 48) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$
 49) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$ 50) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$ 51) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$ 52) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$
 53) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$ 54) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$ 55) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$ 56) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$
 57) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$ 58) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$ 59) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$ 60) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$
 61) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$ 62) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$ 63) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$ 64) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$
 65) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$ 66) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$ 67) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$ 68) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$
 69) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$ 70) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$ 71) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$ 72) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$
 73) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$ 74) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$ 75) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$ 76) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$
 77) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$ 78) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$ 79) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$ 80) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$
 81) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$ 82) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$ 83) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$ 84) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$
 85) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$ 86) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$ 87) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$ 88) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$
 89) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$ 90) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$ 91) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$ 92) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$
 93) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$ 94) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$ 95) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$ 96) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$
 97) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$ 98) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$ 99) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$ 100) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$

Вариант №10

I. Найти интегралы, используя табличные формулы и свойство линейности.

- 1) $\int 3x^7 + 2x^4 + 2 dx$ 4) $\int \frac{\cos 2x}{\cos x + \sin x} dx$
 2) $\int \frac{7}{x} + 4 \operatorname{tg} x + \frac{1}{x} dx$ 5) $\int e^x e^x + e^{2x} dx$
 3) $\int \frac{1}{x^3} dx$ 6) $\int \frac{1}{1 + x^2} dx$

II. Найти интегралы методом подстановки.

- 1) $\int x \operatorname{tg}^2 x dx$ 6) $\int \frac{\arcsin^2 x + x + 1}{1 + x^2} dx$
 2) $\int \frac{3 \ln x + 5}{x^2} dx$ 7) $\int \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1} dx$
 3) $\int \frac{4 \operatorname{tg} x + 3 \operatorname{tg}^2 x + 1}{\cos^2 x} dx$ 8) $\int \frac{\sin x + \cos x}{\cos^2 x} dx$
 4) $\int \frac{x dx}{\cos^2 x}$ 9) $\int x^2 + 4 dx$
 5) $\int \sin^7 x + \cos^5 x dx$ 10) $\int \frac{e^x + \sin x + 1}{x} dx$

III. Выполнить интегрирование почастям.

- 1) $\int x^2 e^{3x} dx$ 3) $\int x \ln^2 x dx$ 5) $\int x \sin 5x dx$
 2) $\int x \operatorname{tg}^2 x dx$ 4) $\int \operatorname{arctg} 4x dx$ 6) $\int e^x dx$

IV. Вычислить интегралы от рациональных дробей.

- 1) $\int \frac{x^5}{x^2 + 27} dx$ 2) $\int \frac{4dx}{x^2 + 2}$ 3) $\int \frac{8x + 18}{x^2 + 1} dx$
 4) $\int \frac{dx}{x^2 + 2}$ 5) $\int \frac{dx}{x^2 + 2}$ 6) $\int \frac{dx}{x^2 + 2}$

V. Вычислить по таблицам.

1) $\int x dx$
 $\int$ $2x$

2) $\int \sin^5 7x \cos^3 7x dx$

3) $\int \operatorname{ctg}^3 4x dx$

4) $\int e^x \cos 3x dx$

Вычислить интегралы:

1. $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x}$

(ответ: $1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$).

2. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

(ответ: $\frac{\pi}{4}$).

3. $\int_1^2 3(x-1)^2 dx$

(ответ: 1).

4. $\int_0^{\pi/2} \sin 3x dx$

(ответ: $\frac{1}{3}$).

5. $\int_1^5 \frac{x dx}{1+x^2}$

(ответ: $\ln \frac{13}{2}$).

6. $\int_0^{\pi/2} \cos^2 \frac{x}{6} dx$

(ответ: $\frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{3}}{8}$).

7. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x}$

(ответ: $\frac{4\sqrt{3}}{3}$).

8. $\int_0^{2\pi} \cos x \cos 5x dx$

(ответ: 0).

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЁННЫХ ИНТЕГРАЛОВ С ПОМОЩЬЮ ПОДСТАНОВКИ

Теорема. Если $f(x) \in C[a, b]$, $t = t(x) \in C^1[a, b]$, причём $x = x(t)$ отображает отрезок $[a, b]$ на отрезок $[t(a), t(b)]$, то $t'(t) \neq 0$,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{t(a)}^{t(b)} f(x(t)) x'(t) dt.$$

Вычислить интегралы:

1. $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx$ (ответ: $\frac{1}{3}$).
2. $\int_3^8 x \sqrt{x} dx$ (ответ: $\frac{32}{3}$).
3. $\int_1^3 x^3 \sqrt{x^2 - 1} dx$ (ответ: $\frac{464}{15}$).
4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 3x \sin 6x dx$ (ответ: $\frac{2}{15}$).
5. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^4 x dx$ (ответ: $\frac{3}{12}$).
6. $\int_1^2 x \sqrt{x^2 - 1} dx$ (ответ: $\ln 3 - \frac{2}{3}$).
7. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2 \cos x + 3}$ (ответ: $\frac{2}{5} \arctg \frac{1}{5}$).

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЁННЫХ ИНТЕГРАЛОВ ПУТЁМ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПО ЧАСТЯМ

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Вычислить интегралы:

1. $\int_0^1 x e^{x^2} dx$ (ответ: $\frac{e^2 - 1}{2}$).
2. $\int_1^e x \ln x dx$ (ответ: $\frac{e^2 - 5}{4}$).
3. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} x \cos 3x dx$ (ответ: $\frac{1}{18}$).
4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx$ (ответ: $\frac{2}{3}$).

$$5. \int_0^{1/2} \arccos x dx$$

(ответ: $\frac{\pi}{2}$).

$$6. \int_0^2 \sin x dx$$

(ответ: 2).

$$7. \int_1^{e^{1/2}} \cos(\ln x) dx$$

(ответ: $\frac{e^{1/2} - 1}{2}$).

Методические указания по выполнению заданий

Для выполнения предложенных заданий на практических занятиях необходимо изучить материал лекции по данной теме. Основные определения и теоремы. При этом следует учитывать, что предложенный в лекции материал частично опирается на некоторые разделы из школьного курса математики, которые также желательно было бы повторить для хорошего и полного усвоения дисциплины.

Практическое занятие

Тема занятия «Комплексные числа и действия с ними»

Цель занятия: расширить понятие числа, ввести понятие комплексного числа и действий над комплексными числами в алгебраической, тригонометрической и показательной формах.

Задания

1.1 Алгебраическая форма комплексного числа.

1. I) Какие множества точек плоскости задаются условиями:
 а) $1 \leq \operatorname{Re} z \leq 2$; б) $\operatorname{Im} z \leq 3$
 II) Отметить на плоскости точки, изображающие следующие комплексные числа: $\frac{i}{2}$; 1 ; i ; $3i$; $1 + i$; i^4 .

2. Вычислить: i^5 ; i^6 ; i_8 ; $\frac{1}{i}$; i^{2011} .

3. $A = i + i^2 + i^3 + \dots + i^{15}$.

4. Найти сумму $z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $z_1 \cdot z_2$, если

1) $z_1 = 5$, $z_2 = 1 + 2i$;
 2) $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = 2 + i$
 3) $z = 2i + 6$, $z = 7 + 3i$

5. Найти число, сопряженное данному:

1) 6 ;

- 2) $4i$;
 3) $5i$;
 4) $2i$
 5) $7i$; $1 + 3i$

6) $\frac{1}{i}$.

7) $115i^2$;

8) $4i^5$;

9) $3 + 5i$;

10) $1 + i$

11) $1 + i$;

12) $1 + i$

6. Найти:

1) действительную часть комплексного числа $z = (2 + i)^3$;

2) мнимую часть комплексного числа $z = 1 + i^{11}$.

7. Представить число в алгебраической форме:

1) $2 + 3i$;

2) $1 + i$;

3) $\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4}$;

8. Выполнить действия:

1) $3 + i + 3 + i$

2) $(1 + i)^4 + 4(1 + i)^3 + 3(1 + i)^2$

3) $(1 + i)^4$

4) $(1 + i)^{1000}$

9. Найти значение выражения:

1) $z^4 + iz^3 + 1 + 2 + 3z + 1 + 3i$ при $z = 2 + 3i$

2) $z^2 + 2iz + 2 + z^2$ при $z = \frac{1}{2} + 3i$;

$z = 1$).

10. Считая x и y действительными числами, решить уравнение
 $(1-i)x + (2-5i)y = 4+17i$

11. Решить уравнения: 1) $x^2 - x - 1 = 0$, 2) $z^2 - 6z - 13 = 0$.
12. При каких действительных значениях x и y комплексные числа $z_1 = 2x^2 - 3i - 1 - yi$ и $z_2 = y^2 + xi$ являются сопряженными?
13. При каких действительных значениях x и y комплексные числа $z_1 = x^2$ и $z_2 = y - y - i$ являются противоположными?
14. При каких действительных значениях x и y комплексные числа $z_1 = 4i - 2xy - xyi$ и $z_2 = y^2 i - x^2$ равны?

1.2 Тригонометрическая форма комплексного числа.

1. Найти модуль и аргумент комплексного числа: i , -1 , i ; $1-i$, $1+i$, $1-i$, $1+i$; 2 ; $2i$; Заданы ли; следующие комплексные числа в тригонометрической форме:

1) $2 \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}$;

5) $4 \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$;

2) $3 \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}$;

6) $\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$;

3) $2 \cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5}$;

7) $\sin \frac{3\pi}{4} + i \cos \frac{3\pi}{4}$.

4) $5 \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$;

3. Представить числа в тригонометрической форме:
 $z_1 = i$; $z_2 = -2$; $z_3 = 2i$; $z_4 = 2 - 3 + 2i$; $z_5 = 1 - i$; $z_6 = 5$.
4. Вычислить, используя тригонометрическую форму комплексного числа:

1) $2 \cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5}$;

✖

$$\cos \frac{7\pi}{12} - i \sin \frac{7\pi}{12};$$

$$\cos \frac{5\pi}{12} - i \sin \frac{5\pi}{12};$$

2) $(1 - i)^5$;

3) $1 - i$;

5. Найти все корни n -й степени из числа z :

1) $z = 3, n = 2$

2) $z = i, n = 4$;

3) $z = 16, n = 4$

4) $z = 16, n = 4$;

6. Найти все корни n -й степени из числа z и дать геометрическую интерпретацию, если:

1) $z = 1, n = 2$

2) $z = 1 - i, n = 4$

3) $z = 27, n = 3$;

4) $z = 32, n = 5$

5) $z = 3, n = 4$

7. Решить уравнение: $z^4 - 1 = 0$.

8. Данные числа z_1 и z_2 представить в показательной форме и выполнить указанные действия над ними а) $z_1^2 z_2$, б) $\frac{z_2}{z_1}$, если $z_1 = 2 - i, z_2 = 8 - i$

9. Вычислить значения функции e^z , где а) $z_1 = 2 + 3i$, б) $z_2 = 2 - i$.

Методические указания по выполнению заданий

Для выполнения предложенных заданий на практических занятиях необходимо изучить материал лекции по данной теме. Основные определения и теоремы. При этом следует учитывать, что предложенный в лекции материал частично опирается на некоторые разделы из школьного курса математики, которые также желательно было бы повторить для хорошего и полного усвоения дисциплины.

Практическое занятие Тема занятия «Дифференциальные уравнения»

Цель занятия: научить студентов находить общие и частные решения ДУ с разделяющимися переменными; находить общие и частные решения ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами; составлять ДУ для решения задач прикладного характера. Показать, что дифференциальные уравнения являются универсальным

средством изучения многих явлений природы, к ним приводят разнообразные задачи естествознания, медицины, экономики, социальной сферы и др.

Задания

Задача 1

Решить дифференциальные уравнения:

1) $y' e^x - y \ln^2 y;$

2) $xy dy dx = (x^2 - 2) dy = 0;$

3) $y' = \frac{x - y}{y - x};$

4) $xy' - y = (x - y) \ln(x - y) - \ln x;$

5) $xy'' - x e^{\frac{y}{x}} = y;$

6) $y' \cos x = y \sin x - 2x;$

7) $x^2 y'' - 2xy' - 2x^5 y;$

8) $x(y' - y) = e^x;$

9) $y' = \frac{1}{x^2};$

10) $y' = \frac{1}{x};$

11) $y' = x^3 y;$

12) $y'' - \frac{2x}{x^2 - 1} y' = 2x;$

13) $3x dy = (y - 6x^2) dx;$

14) $4y' - 3y = y^2 - 1;$

15) $x \ln y' - 2 \ln x = y' - 2y dx;$

(Ввести замену $z = \ln y - 2 \ln x - 1$).

Задача 2

Решить линейные однородные дифференциальные уравнения 2-го порядка:

1) $y'' - 3y' + 2y = 0;$

2) $y'' - 16y = 0;$

3) $y'' - 7y' = 0;$

4) $y'' - 6y' + 9y = 0;$

5) $y'' - 3y' + 8y = 0;$

6) $y'' - 3y' = 0, \text{ при } y(1) = 2, y'(1) = 1;$

7) $y'' - 2y' + 5y = 0, \text{ при } y(0) = 1, y'(0) = 3.$

Задача 3

Решить линейные неоднородные дифференциальные уравнения 2-го порядка:

1) $y'' - 25y = 6e^{2x};$

5) $y'' - 4y' + 4x = 10, \text{ при } y(0) = 1, y'(0) = 3.$

$$2) y'' - 5y' + 6y = x^2$$

$$3) y'' + 4y = \cos 5x;$$

$$4) y'' - 6y' + 9y = 4e^{3x}, \text{ при}$$

$$y(1) = 4, \quad y'(1) = 3;$$

$$y(0) = 4, \quad y'(2) = \frac{19}{4};$$

$$6) y'' - 2y' - 3y = e^x \sin x;$$

$$7) y'' + 36y = xe^{7x}.$$

Задача 4

Решить методом вариации произвольной постоянной:

$$1) y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{2e^{2x}};$$

$$2) y'' - 25y = 6e^{2x}.$$

Методические указания по выполнению заданий

Для выполнения предложенных заданий на практических занятиях необходимо изучить материал лекции по данной теме. Основные определения и теоремы. При этом следует учитывать, что предложенный в лекции материал частично опирается на некоторые разделы из школьного курса математики, которые также желательно было бы повторить для хорошего и полного усвоения дисциплины.

Ниже приведены образцы решений с подробным разбором некоторых заданий

Тема 1. МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

1) Вычислить определители: а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$?

Этот определитель вычислим по правилу диагоналей. Приписываем справа к определителю первый и второй столбцы. Перемножаем элементы, стоящие на главной диагонали и складываем это произведение с аналогичными произведениями элементов, стоящих на диагоналях, параллельных главной. Затем к произведению элементов, стоящих на побочной диагонали, прибавляем аналогичные произведения элементов, стоящих на диагоналях, параллельных побочной. Затем от первой суммы вычитаем вторую. Это и будет искомый определитель.

1	2	3	1	2	
x					
4	5				
		6			
			4		
				5	

$$\begin{aligned}
 & (1 \cdot 5 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 3 \cdot 4 \cdot 8) - (3 \cdot 5 \cdot 7 + 1 \cdot 6 \cdot 9 + 4 \cdot 8 \cdot 2) \\
 &= (45 + 84 + 96) - (105 + 48 + 72) = 225 - 225 = 0
 \end{aligned}$$

7 8 9 7 8 Ответ: 0.

б)

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

Его найдем разложением по первому столбцу, но сначала с помощью свойств

определителя сделаем нули в этом столбце везде кроме элемента, равного -1.

Для этого элементы в т о р о й строки умножим на 2 и прибавим к соответствующим элементам п е р в о й строки; элементы в т о р о й строки прибавим к соответствующим элементам т р е т ь е й строки; элементы в т о р о й строки умножим на 2 и прибавим к соответствующим элементам ч е т в е р т о й строки. Эти действия записываем так:



Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

4) Найти двумя способами ранг матрицы: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$.

1 способ. Метод окаймляющих миноров. Находим любой минор второго порядка, отличный от нуля, например $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$, поэтому выписываем другой определитель $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$. Нашелся определитель второго порядка, отличный от нуля, значит $\text{rang } A = rA = 2$. Теперь найдем определитель третьего порядка, окаймляющий найденный $\Delta_2 = 0$.

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 8 \end{vmatrix} = (2)(1)(1) - (2)(1)(5) = 2 - 10 = -8 \neq 0$$

Берем другой определитель, окаймляющий $\Delta_2 \neq 0$:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 8 \end{vmatrix} = (2)(1)(1) - (2)(1)(5) = 2 - 10 = -8 \neq 0, \text{ как и предыдущий.}$$

Больше окаймляющих миноров третьего порядка для $\Delta_2 \neq 0$ нет, поэтому ранг A , равный наивысшему порядку минора, отличного от нуля, равен 2.

2 способ. Метод элементарных преобразований.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 - 2R_1 \\ R_3 - R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 + 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Получили 2-е нулевые строки. Поэтому ранг A равен 2 (очевидно минор второго порядка $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$). Ответ: $rA = 2$.

Тема 2. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Найдем

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\text{т.е. } \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \\ z = 12 \end{cases}$$

Проверка. Подставим найденное решение в исходную систему:

$$1-2+3=2 \quad (\text{истина}), \quad 2 \cdot 1 + 2 - 3 = 1 \quad (\text{истина}), \quad 1 - 2 \cdot 2 = -3 \quad (\text{истина}).$$

$$\text{Ответ } \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \\ z = 12 \end{cases}$$

2) Решить систему методом Крамера. Возьмем эту же систему и решим её с помощью определителей.

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + y + z = 1 \\ x + 2y = 3 \end{cases} \quad \text{Запишем определитель системы: } \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 6 \quad (\text{Найден выше}).$$

Заменим в Δ столбец коэффициентов при x на столбец правых частей

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 3(1)^2 - 1(0-2) = 3 + 2 = 5$$

Заменим в Δ столбец коэффициентов при y на столбец правых частей

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 1(0-3) - 2(0-1) = -3 + 2 = -1$$

Заменим в Δ столбец коэффициентов при z на столбец правых частей

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1(3-2) - 1(6-1) + 2(6-1) = 1 - 5 + 10 = 6$$

первое уравнение найденные $y=2$ и $z=3$, находим $x=2+y-z=2+2-3=4-3=1$.

Ответ:
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

б)
$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + y + z = 1 \\ x + 2y + 2z = 1 \end{cases}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - R_1, R_3 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \cdot (-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$rA=2$, $rB=3$. Следовательно, по теореме Кронекера-Капелли система несовместна (т.е. не имеет решения). Выпишем уравнение, соответствующее последней строке полученной матрицы: $0x + 0y + 0z = 2$, что невозможно.

Ответ: система не имеет решения.

в)
$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

Записываем расширенную матрицу :

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - R_1, R_3 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 - 3R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 + 2R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

совместна.

Число неизвестных $n=3$ $r=2$ Система имеет бесконечное множество решений. $n-r=3-2=1$ Одна свободная переменная, пусть это будет z , тогда x, y – базисные (базисных неизвестных столько, каков ранг системы, то есть сколько ненулевых строк остается в последней матрице).

Запишем систему, соответствующую полученной матрице :
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y = 4z \\ z = z \end{cases}$$

Идя снизу вверх, выражаем базисные неизвестные через свободную z . Из второго уравнения выражаем $y = -4 - 4z$, из первого уравнения $x = y + z + 1 = (-4 - 4z) + z + 1 = -4 - 4z + z + 1 = -3 - 3z$.

Общее решение:

$$\begin{cases} x = -3 - 3z \\ y = -4 - 4z \\ z = z \end{cases}$$

Из общего решения можно получить любое частное решение. Пусть $z = -2$, тогда получим частное решение: $x = -3 - 3(-2) = -3 + 6 = 3$; $y = -4 - 4(-2) = -4 + 8 = 4$.

Частное решение:

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \\ z = 2 \end{cases}$$

Выполним проверку общего решения. Для этого подставим найденные выражения для x, y, z в уравнения исходной системы:

- 1) $3(-3 - 3z) + 2(-4 - 4z) + z = 1$
 $1 \quad 9 \quad 9z \quad 8 \quad 8z \quad z \quad 1 \quad 1$
 $1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1$
- 2) $2(-3 - 3z) + (-4 - 4z) + 2z = 2$
 $2 \quad 6 \quad 6z \quad 4 \quad 4z \quad 2z \quad 2 \quad 2$ (истина)
- 3) $(-3 - 3z) + (-4 - 4z) + z = 1$
 $1 \quad 3 \quad 3z \quad 4 \quad 4z \quad z \quad 1 \quad 1$ (истина)

Ответ:

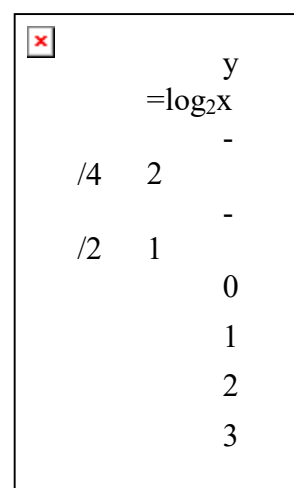
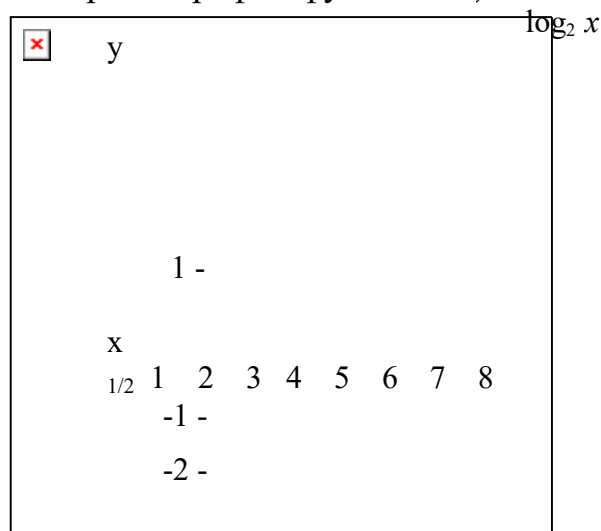
$$\begin{cases} x = -3 - 3z \\ y = -4 - 4z \\ z = z \end{cases}$$

Тема 3. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ

1) Построить график функции путем сдвигов и деформаций

$$y = \log_2(1 + x) + 2$$

1. Строим график функции $y = \log_2 x$ (рис.1)



2. Симметрично отображаем этот график относительно оси OY и получаем график функции $y = \log_2(x)$ (на рис.2 – сплошная линия).

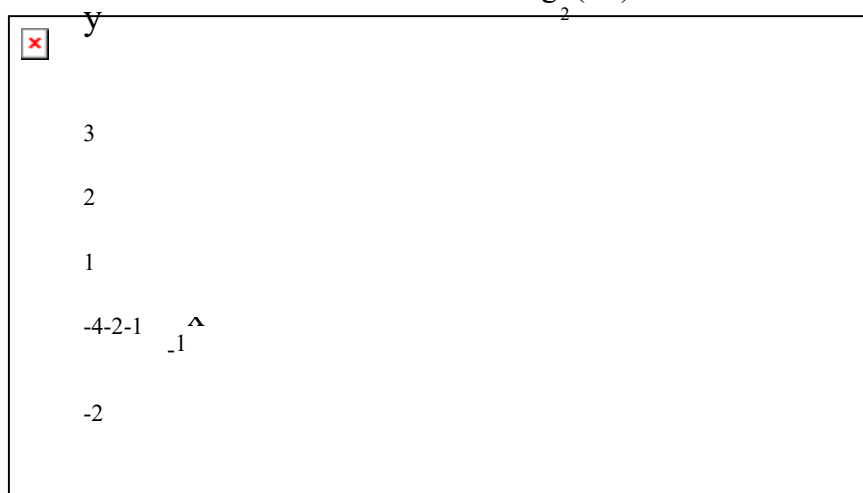
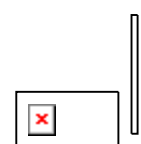


Рис.2

3. Сдвигаем этот график на одну единицу вправо и получаем график функции $y = \log_2(1+x)$ (на рис.2 пунктирная линия).
4. Сдвигаем этот график на 2 единицы вниз и получаем график функции $y = \log_2(1+x) - 2$ (на рис.2 штрих-пунктирная линия), что и будет графиком данной функции.

2) Построить график функции, заданной несколькими аналитическими выражениями:

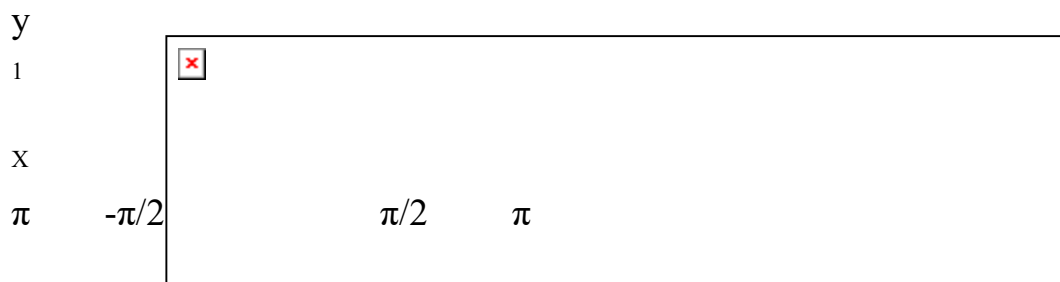


$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{при } |x| \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{при } |x| > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Запишем данную функцию по интервалам возрастания аргумента x :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq -\frac{\pi}{2}, \\ \cos x, & \text{при } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{при } x \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Графиком $f(x)$ при $x \leq -\frac{\pi}{2}$ будет часть оси OX , при $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ часть косинусоиды, затем при $x \geq \frac{\pi}{2}$ снова часть оси OX



3) Построить график функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = t - 1 \\ y = t^2 - 2t + 2 \end{cases}$$

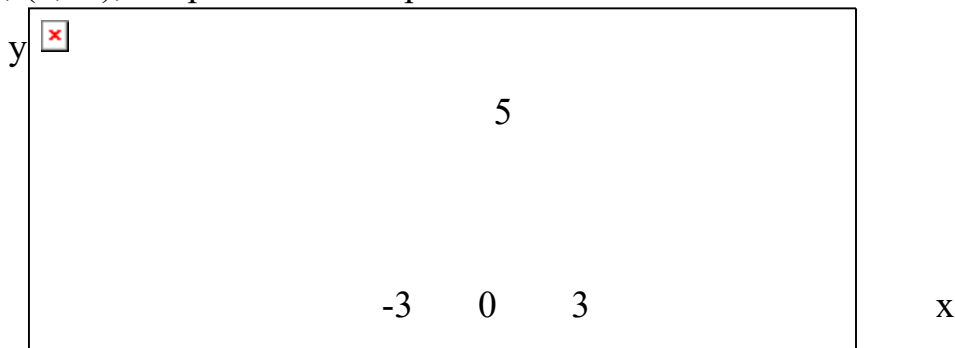
График функции, который надо построить, проходит через точки с координатами $(x=t, y=t)$. Чтобы найти координаты этих точек составим таблицу связи аргумента t и координат точек (x,y) в зависимости от t .

☒	t	-2	-1	0	1	2	3	4
	x	-2	-1	0	1	2	3	
	y	1	5	2	1	2	5	1

$$\begin{cases} x = t - 1 \\ y = t^2 - 2t + 2 \end{cases}$$

☐	0	0
--------------------------	---	---

Для построения графика берем две последние строки таблицы и отмечаем на координатной плоскости точки $(-3,10)$, $(-2,5)$, $(-1,2)$, $(0,1)$, $(1,2)$, $(2,5)$, $(3,10)$, координаты которых находятся в столбцах.



Затем соединяем полученные точки кривой (в данном случае получилась парабола вида $y = x^2$, смещенная на оси OY на 1 вверх, то есть $y = x^2 + 1$).

4) Построить график функции, заданной в полярной системе координат:

$\rho = a(1 - \cos \varphi)$. Здесь a выступает в роли масштаба. На полярной оси откладываем вместо единиц a , $2a$, $3a$ и т.д. Заносим в таблицу значения ρ ,

вычисленные для углов $\varphi = 0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ, 105^\circ, 120^\circ, 135^\circ, 150^\circ, 165^\circ, 180^\circ, 195^\circ, 210^\circ, 225^\circ, 240^\circ, 255^\circ, 270^\circ, 285^\circ, 300^\circ, 315^\circ, 330^\circ, 345^\circ, 360^\circ$ удобнее $\frac{\rho}{a}$.

☐	φ	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
ρ		2,9	1,5	1	1,5	0,1	0	0,1	0,5	0	1,5	1,9	1	2,9

На полярной оси откладываем a и проводим окружность этого радиуса. Проводим луч под углом φ и находим точку пересечения этой окружности и этого луча. Сначала строим точку $(2a, 0^\circ)$ так: на оси $o\rho$ откладываем отрезок длины $2a$, это и будет точка. Затем строим точку $(1,9a; 30^\circ)$ длиной $1,9a$, проводим окружность этого радиуса, строим луч под углом 30° и находим точку их пересечения, это и будет искомая точка и т.д.

откладываем вместо единиц $a, 2a, 3a$ и т.д. Заносим в таблицу значения $\frac{1}{a}$, вычисленные для углов $0, 360^\circ$ $\frac{1}{a}$ удобнее.

Тема 4. ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ

Вычислить пределы функций:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x + 1}{x^2 - 2x + 3} \left[\begin{array}{l} \text{подставляем} \\ x = 1 \end{array} \right] = \frac{1 - 5 + 1}{1 - 2 + 3} = \frac{-3}{2}$$

Ответ:

$$\frac{-3}{2}.$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 1} \left[\begin{array}{l} \text{подставляем} \\ x = 1 \end{array} \right] \text{ получаем } \frac{0}{0} \text{ это неопределенность. Чтобы}$$

избавиться от такой неопределенности следует и в числителе, и в знаменателе выделить “ноль”, то есть множители, которые и дают нули. В данном примере $(x+1)$ обращается в 0 при $x=-1$, его и будем выделять, чтобы потом сократить.

$$1. x^2 - 5x + 6 = (x - 1)(x - 6);$$

2. $x^2 - 5x + 6$ (находим корни этого уравнения):

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2} \Rightarrow x_1 = 3, x_2 = 2$$

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2)$$

3.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 3)(x - 2)}{(x - 1)(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 3}{x + 1} \left[\text{подставляем } x = 1 \right] = \frac{1 - 3}{1 + 1} = -\frac{2}{2} = -1$$

Ответ: $-\frac{2}{2}$.

3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 4x^2 + 3x + 1}{4x^3 - 2x + 5}$ при подстановке $x = \infty$ получаем $\frac{\infty}{\infty}$ Это неопределенность.

Чтобы избавиться от такой неопределенности, следует и в числителе, и в знаменателе вынести за скобки наивысшую степень x .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 4x^2 + 3x + 1}{4x^3 - 2x + 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3(1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3})}{x^3(4 - \frac{2}{x^2} + \frac{5}{x^3})} = \frac{1}{4}$$

При нахождении этого предела использовано:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad \text{при } n > 0$$

коэф

$$y = \frac{1}{x^n}$$

Получили в ответе отношение при старших степенях x .

$$4) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 3x}{x^2 - 3x} = \frac{0}{0}.$$

Для решения следует воспользоваться формулой сокращенного умножения

$$\frac{a^2 - b^2}{a - b} = \frac{(a - b)(a + b)}{a - b}.$$

Домножим числитель и знаменатель на $x - 3$.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 3x}{x^2 - 3x} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(2x - 3)(x - 3)}{(x - 3)(x + 3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x - 3}{x + 3} = \frac{2 \cdot 3 - 3}{3 + 3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 2x + 1} = \frac{0}{0}.$$

Для решения применяем тот же прием, что и выше: домножаем числитель и знаменатель на сумму этих корней, чтобы получить разность квадратов:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 2x + 1) + 2}{(x^2 - 2x + 1) - 0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)^2 + 2}{(x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(1 + \frac{2}{(x - 1)^2} \right) = \infty.$$

Как и в примере 3) вынесем за скобки x в первой степени, причем

$$\frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 2x + 1} = \frac{x^2 - 2x + 1 + 2}{x^2 - 2x + 1} = \frac{(x - 1)^2 + 2}{(x - 1)^2} = 1 + \frac{2}{(x - 1)^2}.$$

тогда

$$4 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 2x + 1} = 4 \lim_{x \rightarrow 1} \left(1 + \frac{2}{(x - 1)^2} \right) = 4 \cdot \infty = \infty.$$

0

Ответ: 2.

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 15x}{\operatorname{tg} 13x} \left| \frac{0}{0} \right|; \text{применяем первый замечательный предел: } \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 15x}{\operatorname{tg} 13x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 15x}{\frac{\sin 13x}{\cos 13x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 15x \cos 13x}{\sin 13x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{15x \cos 13x}{13x} = \frac{15}{13}$$

11

$$7) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 2}{3x^3 - 2} \left| \frac{\infty}{\infty} \right| \text{ т.к. } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 2}{3x^3 - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{3} = \frac{4}{3} \neq 1, \text{ то имеем неопределенность}$$

Применяем второй замечательный предел: $\lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u = e$. Выделяем в основании степени “единицу” так: прибавляем 1 и вычитаем 1.

$$\frac{3x^4 - 2}{3x^3 - 2} = 1 + \frac{3x^4 - 2 - (3x^3 - 2)}{3x^3 - 2} = 1 + \frac{3x^4 - 3x^3}{3x^3 - 2} = 1 + \frac{3x^3(x - 1)}{3x^3 - 2}$$

В нашем случае $u = \frac{6}{3x^3 - 2}$, т.е. $\frac{1}{u} = \frac{3x^3 - 2}{6}$, поэтому

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3x^3 - 2}{6}\right)^{\frac{6}{3x^3 - 2}} = e$$

Подставляем это в пример:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 2}{3x^3 - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3x^3 - 2}{6}\right)^{\frac{6}{3x^3 - 2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3x^3 - 2}{6}\right)^{\frac{6}{3x^3 - 2} \cdot 2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3x^3 - 2}{6}\right)^{\frac{12x}{3x^3 - 2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3x^3 - 2}{6}\right)^{\frac{12x}{3x^3 - 2}} = e^4$$

Ответ: e^4 .

$$8) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 2}{4x^3 - 3} \left| \frac{\infty}{\infty} \right| \text{ т.к. } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 2}{4x^3 - 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3}{4x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty, \text{ то получаем показательную}$$

функцию с основанием меньше единицы в бесконечно большой степени, которая стремится к нулю $\lim_{x \rightarrow \infty} = 0$.

Ответ: 0.

Исследовать на непрерывность и построить график функции:

$$1) \quad f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \leq 1 \\ 7 - x, & x > 1 \end{cases}$$

Для исследования функции на непрерывность воспользуемся тем, что функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 , если выполняются равенства:

$$(*) \quad \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0)$$

Все элементарные функции, входящие в данную функцию, непрерывны на своих интервалах, поэтому проверять непрерывность будем в точках «склеивания».

$$x=1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} (x^2 + 1) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} (7 - x) = 6$$

$$f(1) = 1^2 + 1 = 2$$

Сравниваем эти три числа и видим, что первое равенство в (*) не выполняется. Следовательно, $x = 1$ - точка разрыва I рода, причем неустранимого (т.е. скачок).

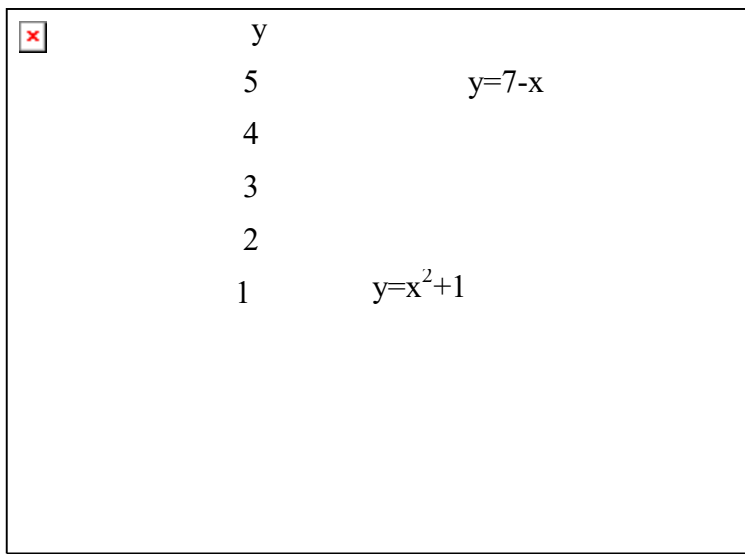
$$x=2$$

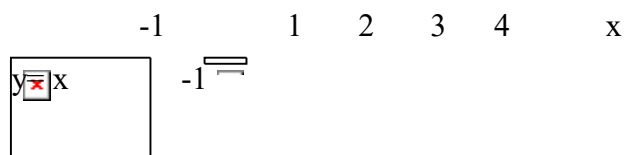
$$\lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-0} (x^2 + 1) = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+0} (7 - x) = 5$$

$$f(2) = 7 - 2 = 5$$

Сравниваем эти три числа и видим, что все равенства в (*) выполняются. Следовательно, в точке $x = 2$ данная функция непрерывна.





На графике функции на конце прямой $y = x$ в точке $(-1, -1)$ ставим стрелку, так как функция $f(x) = x$ при x , строго меньше -1 , а при $x \geq -1$ значение функции $f(x)$ вычисляется уже по другой формуле $x^2 - 1$. Причем в точках непрерывности никаких стрелок не ставится.

$$2) f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$$

О.Д.З. $x \neq 1$.

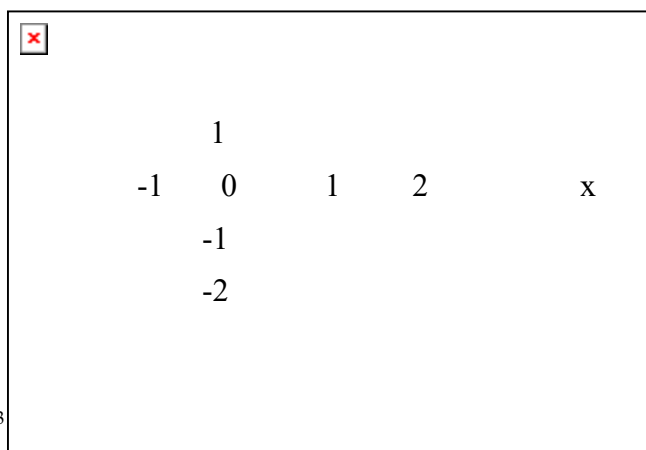
Так как $x = 1$ не входит в область допустимых значений (О.Д.З.) функции, то $x = 1$ является точкой разрыва данной функции. Выясним с помощью односторонних пределов, разрыв какого рода терпит функция в этой точке.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{(x - 2)(x - 1)}{x - 1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} (x - 2) = 1 - 2 = -1$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{(x - 2)(x - 1)}{x - 1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} (x - 2) = 1 - 2 = -1$$

Получили, что в (*) первое равенство выполняется, а функция $f(1)$ не существует, т.е. второе равенство не выполняется. Следовательно, $x=1$ – точка разрыва I рода, причем устранимого. На графике выкалывается точка $(1, -1)$ стрелками, так как $x=1$ не входит в О.Д.З.

у



$$3) f(x) = 1 + \frac{1}{2^{x+3}}$$

О.Д.З. $x \neq -3$. Значит $x=-3$ - точка разрыва.

Определяем тип разрыва функции в этой точке. Для этого опять находим левый и правый пределы при $x \rightarrow -3$.

Левый предел.

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{1}{2x^3 - 3} = \frac{1}{2(-3)^3 - 3} = \frac{1}{-27 - 3} = \frac{1}{-30} = -\frac{1}{30}$$

Правый предел.

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{1}{2x^3 - 3} = \frac{1}{2(-3)^3 - 3} = \frac{1}{-27 - 3} = \frac{1}{-30} = -\frac{1}{30}$$

получился бесконечный предел, поэтому $x = -3$ – точка разрыва II рода.

Исследуем поведение функции при $x \rightarrow \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x^3 - 3} = \frac{1}{2(\infty)^3 - 3} = \frac{1}{\infty} = 0$$



Тема 5. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ

Найти производные функций:

1) $y = e^{x^3 - 5x^2 - 4x - 12}$

Можно представить данную функцию как $y = e^u$, где $u = x^3 - 5x^2 - 4x - 12$. Зная, что $\frac{d}{dx} e^u = e^u \cdot \frac{du}{dx}$ и , получим

$$y' = e^{x^3 - 5x^2 - 4x - 12} \cdot (3x^2 - 10x - 4)$$

Ответ: $y' = (3x^2 - 10x - 4) e^{x^3 - 5x^2 - 4x - 12}$

2) $y = \lg^3 5x$

Можно представить $y = u^3$, где $u = \operatorname{tg} 5x$.
 При этом $u^3 = 3u^2 \cdot u$

$$= 3 \operatorname{tg}^2 5x \cdot \frac{1}{\cos^2 5x} \cdot 5 = 15 \operatorname{tg}^2 5x \cdot \frac{1}{\cos^2 5x}.$$

Ответ: $y' = 15 \frac{\operatorname{tg}^2 5x}{\cos^2 5x}$.

3) $y = 3x \ln x$.

$y' = 3x' \ln x + 3x \ln x' = 3 \cdot 1 \cdot \frac{1}{x} + x \cdot 3 \ln x = 3 \ln x + \frac{3}{x}$

Ответ: $y' = 3 \ln x + \frac{3}{x}$

4) $y = \frac{x^2 - 3}{2x}$.

Правило: $\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{x^2 - 3}{x} \right)' = \frac{1}{2} \frac{(2x - 0)x - (x^2 - 3) \cdot 1}{x^2} = \frac{1}{2} \frac{2x^2 - x^2 + 3}{x^2} = \frac{1}{2} \frac{x^2 + 3}{x^2}$$

Ответ: $y' = \frac{x^2 + 3}{2x^2}$.